Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

MATHEMATICS

A NEW IMPROVEMENT OF THE ESTIMATION OF TRIGONOMETRICAL SUMS

By I. VINOGRADOW

I give in the present paper a new very essential improvement of the estimation of the trigonometrical sums. This improvement is attained by the fundamental reconstruction of the method given in my previous papers (1).

1°. Let n be a constant integer >20, $\nu=\frac{1}{n}$, c, c_0, c_1, ... are positive constants, depending only on n. $\{z\}$ denotes a fractional part of a real number z. R is an integer, P is a positive integer; a_0, a_1, ..., a_n are real,

$$f(x)=a_0x^n+\ldots+a_n,$$

$$a_0=\frac{a}{q}+\lambda q^{-2+c_1}, \quad (a,q)=1, \quad |\lambda|\leqslant c_2.$$

Then two following theorems take place.

Theorem 1. Putting (we may choose the values of c_3, c_4, c_5, c_6 as we please)

$$\rho=\frac{\nu^3}{12{,}2\log n}, \quad \text{if} \quad c_3P\leqslant q\leqslant c_4P, \quad c_1=\nu^3,$$

$$\rho=\frac{\nu^3}{20\log n}, \quad \text{if} \quad c_4P\leqslant q\leqslant c_5P^{n-1-\nu}, \quad c_1=\nu^3,$$

$$\rho=\frac{\nu^3}{8\log\frac{10n^2}{c}}, \quad \text{if} \quad c_5P^{n-1-\nu}\leqslant q\leqslant c_6P^{n-c}, \quad c\leqslant 1+\nu, \quad c_1=c\nu^4,$$

we may for each case respectively find such c_0 that

$$\left|\sum_{x=R+1}^{R+P}e^{2\pi i f(x)}\right|\leqslant c_0P^{1-\rho}.$$

Theorem 2. Let

$$0<\sigma\leqslant 1, \quad P\geqslant q^{\frac{1}{n-1-\nu}}$$

The number of fractions in the series

$$\{f(x)\}; \quad x=R+1, \ldots, R+P$$

satisfying the condition

$$0 \leqslant \{ f(x) \} \leqslant \sigma$$

is given by the formula

$$\sigma P + 0(Pq^{-\rho}), \quad \rho = \frac{\nu^3}{21 \log n}.$$

2°. Further let

$$A \geqslant c_7, \quad P \geqslant c_8 A^{\frac{1}{n-1-\nu}}$$

and the real function $F(x)$ has in the interval

$$R \leqslant x \leqslant R + P$$

the derivatives ot the n-th and $n+1$-th order satisfying the conditions

$$c_9 A^{-1} \leqslant F^{(n)}(x) \leqslant c_{10} A^{-1}, \quad |F^{(n+1)}(x)| \leqslant c_{11} A^{-1-3\nu}.$$

Then the following theorems result immediately from the theorems 1 and 2.

Theorem 3. We have

$$\left| \sum_{x=R+1}^{R+P} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqslant c_{12} P A^{-\rho}, \quad \rho = \frac{\nu^3}{21 \log n}.$$

Theorem 4. Let $0 < \sigma \leqslant 1$. Then the number of the fractions in the series

$$\{ F(x) \}; \quad x = R+1, \ \ldots, \ R+P$$

satisfying the condition

$$0 \leqslant \{ F(x) \} \leqslant \sigma$$

is given by the formula

$$\sigma P + 0(PA^{-\rho}), \quad \rho = \frac{\nu^3}{21 \log n}.$$

3°. The theorem 1 together with some complementary researches allows to establish the following

Theorem 5. The Hardy-Littlewood asymptotic formula for the number of the representations of an integer N in the form

$$N = x_1^n + \ \ldots \ + x_r^n,$$

$x_1, \ \ldots, \ x_r$ being positive integers is true for every

$$r > 10n^3 \log n.$$

The remainder of this formula may be given in the form

$$0(N^{r-1-\delta}); \quad \delta = \frac{\nu}{1\,000}.$$

V. Stekloff Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the
USSR Moscow

Received
25. II. 1936.

REFERENCES

[1] Vinogradow, C. R. Acad. Sci., Paris t. 201, No 13, 1935. — Idem, Recneil Mathématique, т. 42, № 5, 1935. — Idem, C. R. Acad. Sci., Paris. t. 202, No 3, 1936.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

MATHEMATICS

ON ZEROS OF THE FUNCTION $\zeta(s)$

By N. G. ČUDAKOV (TCHUDAKOFF)

(*Communicated by I. M. Vinogrndow, Member of the Academy, 16. 1. 1936*)

Academician I. M. Vinogradow(1) has proved the following theorem:

Let $n \geqslant 20$; $\nu = \frac{1}{n}$; $a_0 \ldots a_n$ are real numbers;

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0;$$

$$a_n = \frac{a}{q} + \vartheta q^{-2+\nu^2}; \quad (a;\ q) = 1;$$

$$q > 0 \mid: \quad \vartheta \mid \leqslant 1.$$

Let Q and P be integers, $0 < P \leqslant c_0 P_1$; $c_0 \geqslant 1$.

Then

$$\sum_{Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)} \leqslant C(n)\, P_1\, q^{-\rho},$$

where $P_1 = q^{\frac{2}{2n-1}}$; $\rho = \frac{\nu^7}{45\,(\lg n + 1)^2}$ (or $\rho = c_1 \nu^8$).

Moreover, it is easy to verify that all coefficients which occur in Vinogradow's work do not exceed the quantity

$$e^{cn^A},$$

where $c > 0$; $A > 0$ being absolute constants.

Using this theorem as a basis, it is possible to prove the following lemma:

Lemma. *In the domain*

$$\sigma \geqslant 1 - (\lg t)^{-\vartheta}; \quad t \geqslant t_1$$

holds the inequality

$$|\zeta(s)| \leqslant e^{c_2 (\lg t)^{\tau}}; \quad \tau = 1 - \beta\vartheta;$$

$$c_2 > 0; \ \vartheta > 0; \ 0 < \tau < 1; \ \beta = \frac{8}{7}; \ \vartheta < \frac{7}{8},$$

all these quantities being absolute constants.

Proof. It is well known(2) that

$$\zeta(s) = \sum_{m \leqslant t} m^{-s} + O(1); \quad \sigma > \frac{1}{2}.$$

We divide the interval $(1;\ t)$ into three parts

$$(1;\ T); \quad (T;\ t^{\frac{1}{10}}); \quad (t^{\frac{1}{10}};\ t),$$

where $\lg T = (\lg t)^{c_3}$; $\tau + \vartheta > c_3 > 1 - \frac{\tau}{A}$; $c_3 > 0$.

It is easy to verify that

$$\sum_{1}^{T} m^{-s} = O\left(e^{c_4 (\lg t)^{\tau}}\right). \tag{I}$$

Further, by applying Weyl's (3) evaluations, it is easy to obtain

$$\sum_{t^{1/10}}^{t} m^{-s} = O\left(\lg^2 t\right) = O\left(e^{c_5 (\lg t)^{\tau}}\right). \tag{II}$$

Finally, we divide the interval $(T;\ t^{\frac{1}{10}})$ into parts:

$$(N_0;\ N_1);\ (N_2;\ N_3) \ldots (N_s;\ t^{\frac{1}{10}}), \tag{1}$$

where

$$N_0 = [T] + 1; \quad N_1 = 2([T] + 1); \quad N_2 =$$

$$+ 2^2([T] + 1); \ldots; \quad N_s = 2^s([T] + 1) \leqslant t^{\frac{1}{10}} < 2^{s+1}([T] + 1).$$

Then we take any interval of the system (1); for instance:

$$(N_p;\ N_{p+1}).$$

It follows from Abel's theorem that

$$\left| \sum_{N_p}^{N_{p+1}-1} m^{-s} \right| \leqslant N_p^{-\sigma} \max_{N_p \leqslant N' \leqslant N_{p+1}-1} \left| \sum_{N_p}^{N'} e^{it \lg m} \right|. \tag{2}$$

Afterwards we divide

$$(N_p;\ N');\ N' \leqslant N_{p+1} - 1$$

into parts according to the following rule:

Let

$$n = \left[\frac{2 \lg t}{\lg N_p}\right];$$

$$a_n(N_p) = \frac{(-1)^{n-1} t}{2\pi n N_p^n}.$$

Further let

$$q_0 = \left[\frac{1}{a_n(N_p)}\right]; \quad \mu_1 = \left[\frac{1}{2A_1} q_0^{\frac{2}{2n-1}}\right], \tag{3}$$

where

$$A_1 = \sup\left((2\pi n)^{\frac{2}{2n-1}} 2^{\frac{2n}{2n-1}}\right) \quad \text{for } n \geqslant 20.$$

Then, if t_0 is sufficiently large, we have

$$2 < \mu_1 < \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{n+1}} N_p.$$

By applying the method of the «*fonctions majorantes*» (4), we obtain without difficulty:

$$\left| \sum_{N_p}^{N_p+\mu'} e^{it \lg m} \right| \leqslant 2 \max_{0 \leqslant \mu'' \leqslant \mu'} \left| \sum_{\mu''}^{\mu'} e^{2\pi i f(x)} \right|, \tag{4}$$

where

$$\mu'' \leqslant \mu' \leqslant \mu_1 - 1;$$

$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1} t x^r}{2\pi r N_p^r}.$$

It is easy to notice that I. M. Vinogradow's theorem may be applied to the right side of (4).

Consequently, we obtain:

$$\left|\max_{0\leqslant\mu''\leqslant\mu'}\sum_{0}^{\mu''} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqslant C(n)\, q_0^{\frac{2}{2n-1}-\rho}.$$

By simple calculations it is easy to verify that

$$\left|\sum_{N_p}^{N_p+\mu'} e^{it\lg m}\right| \leqslant c_6 C(n)\,\mu_1\left(\frac{t}{N_p^n}\right)^{\rho}. \tag{5}$$

Further, it is easy to see that ρ is equal to the quantity

$$c_1\nu^p \quad (p=8).$$

Having assumed the point

$$M_1 = N_p + \mu_1$$

to be the origin of a new interval and constructed for this point the numbers:

$$a_n(M_1);\quad q_1 = \left[\frac{1}{a_n(M_1)}\right];\quad \mu_2 = \left[q_1^{\frac{2}{2n-1}}\right],$$

we shall easily show that

$$\left|\sum_{M_1}^{M_1+\mu'} e^{it\lg m}\right| \leqslant c_6 C(n)\,\mu_2\left(\frac{t}{N_p^n}\right)^{\rho}, \tag{6}$$

where $\mu' \leqslant \mu_2$ and so on.

Let us continue constructing the numbers

$$N_p;\quad M_1,\quad M_2\ \ldots\ ,$$

so long as the interval

$$(N_p;\quad N')$$

is not covered.

We get a set of inequalities analogous to (4) and (5).

By summing them up we obtain

$$\left|\sum_{N_p}^{N'} e^{it\lg m}\right| \leqslant c_6 C(n) N_p\left(\frac{t}{N_p^n}\right)^{\rho},$$

because

$$\mu_1 + \mu_2 + \ \ldots\ \leqslant 2N_p.$$

Putting

$$z = \frac{\lg N_p}{\lg t} \qquad (0 \leqslant z \leqslant 1),$$

we have after some simple calculations

$$\left|\sum_{N_p}^{N'} m^{-s}\right| \leqslant c_6 C(n)\, t^{z(1-\sigma)-c_1' z^8}. \tag{7}$$

But if t_0 is sufficiently large we have:

$$C(n) \leqslant e^{cnA} \leqslant e^{c'(\lg t)^{\tau}};$$

$$z(1-\sigma) - c_1' z^8 \leqslant c_7 (1-\sigma)^{\beta} \qquad \left(\beta = \frac{8}{7}\right).$$

Consequently, it follows from (7) in that the domain

$$\sigma \geqslant 1 - (\lg t)^{-\phi}$$

we have

$$\left|\sum_{N_p}^{N'} m^{-s}\right| = O\left(e^{c''(\lg t)^{\tau}}\right). \tag{8}$$

Since the system (1) includes $O(\lg t)$ intervals, (8) gives

$$\sum_{T}^{t^{\frac{1}{10}}} m^{-s} = O(e^{c'''(\lg t)^{\gamma}}). \tag{III}$$

(I), (II), (III) give the proof of the lemma.

Theorem (1). *Let δ be the distance of zero of the function $\zeta(s)$ from the straight line $\sigma = 1$; then for $t \geqslant t_0$ we have*

$$\delta \geqslant c_1 (\lg t)^{-\gamma},$$

where

$$c_1 > 0; \quad 0 < \gamma < 1; \quad 1 - \gamma < \frac{1}{8}.$$

Proof. Let t_0 be sufficiently large. We take the point

$$1 + \frac{1}{40c_2}(\lg t)^{-\gamma} + it$$

as the centre of a circle which radius is.

$$r = \frac{1}{2}(\lg t)^{-\vartheta}.$$

Since

$$\frac{1}{40c_2}(\lg t)^{-\gamma} = o(r) \quad \text{for} \quad t \to \infty,$$

it is easy to prove our theorem by using the well-known theorem (5) of the theory of functions as a basis.

From theorem 1 it is easy to deduce the following theorem by means of usual reasonings (6):

Theorem 2. *Let $\pi(x)$ be the number of prime numbers between 1 and x; then*

$$\pi(x) = \int_{2}^{x} \frac{dx}{\lg x} + O(xe^{-c_7 (\lg t)^{\mu}}),$$

where

$$c_7 > 0; \quad 1 > \mu > \frac{1}{2} + \frac{1}{111}.$$

Theorem 1 permits to evaluate more exactly the difference:

$$p_{n+1} - p_n,$$

where p_{n+1} and p_n are two consequent prime numbers, namely

$$p_{n+1} - p_n = O\left(p_n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}\right).$$

The theorem 1 permits to prove the following theorem:

$$\psi(x+y) - \psi(x) = y + o(y),$$

where $\psi(x)$ is Tchebyshev's function;

$$y = x^{\frac{3}{4}} + A\frac{\lg \lg x}{(\lg x)^{\gamma'}};$$

(A and γ' are the positive constants; $x \geqslant x_0$) *.

Stekloff Institute of Mathematics of the
Academy of Sciences of USSR. Moscow.

Received
16. I. 1936.

REFERENCES

[1] И. М. Виноградов, Математический сборник, т. 42, № 5. [2] Heilbronn, Math. ZS., 36, 403. [3] E. Landau, Vorlesungen, Bd. II, Satz 389. [4] E. Landau, Vorlesungen, Bd. II, Satz 387. [5] Heilbronn, Math. ZS., 36, 405. [6] Ingham, Distribution of Prime Numbers, p. 63.

* We can extend all these results to the theory of Dirichlet's L-series and to the series of prime numbers in the arithmetical progression.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

MATHÉMATIQUES

CONTRIBUTION À LA MÉTHODE DE N. I. MUSCHELIŠVILI DANS LE PROBLÈME PLAN DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ

Par D. I. ŠERMAN

(Présenté par I. M. Vinogradow, de l' Académie, le 4. XII. 1935)

N. I. Muschelišvili a réussi récemment à réduire les problèmes fondamentaux de la théorie d'élasticité à la solution d'un système d'équations intégrales, très simple de forme (1). En l'étudiant dans le cas du premier problème fondamental*, l'auteur considérait comme connu le théorème antérieurement prouvé de l'existence d'une solution (2). Sous cette condition il a établi la solubilité du système et l'existence des fonctions fondamentales.

Dans la présente note nous allons prouver l'existence de la solubilité du premier problème fondamental, partant directement des équations de N. I. Muschelišvili.

Soit S le domaine fini multiconnexe dans le plan xy, $L_1, L_2, \ldots, L_m$ — ses contours intérieurs, L_{m+1} — le contour extérieur et $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_{m+1}$ — l'entière frontière. Désignons ensuite les intérieurs $L_1, \ldots, L_m$ respectivement par $S_1, \ldots, S_m$ et l'extérieur L_{m+1} par S_{m+1}.

Remplaçons l'équation de N. I. Muschelišvili pour la fonction $\varphi(z)$, régulière dans le domaine S, de la variable complexe $z = x + iy$ par la suivante (1):

$$\overline{\varphi(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\, d \lg \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\, d\, \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{t_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t}\right\} = -A_e(t_0) + \bar{C}_j, \qquad (1)$$

ajoutant au côté gauche l'opérateur

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \frac{1}{t_0}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t}\right\}, \qquad (2)$$

* Le premier problème fondamental consiste dans la détermination des déplacements et des tensions dans le domaine d'après les forces extérieures, données sur la frontière.

où t_0 est la coordonnée complexe du point du contour L, $A_e(t_0) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1 - if_2}{t-z}\,dt\right)_e$ la valeur limite de la fonction connue, analytique dans S_j; C_j sont des constantes arbitraires $(j = 1,2,\ldots,m+1)$*.

Notons, que cette solution de (1) satisfait aux conditions**:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = 0,\ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}}{\overline{t}^2}\,d\overline{t} = 0, \tag{3}$$

si

$$\int_L f_1\,dx + f_2\,dy = 0.$$

Désignons le système homogène obtenu de (1) pour $-A_e(t_0) + \overline{C}_j = 0$ par (4).

Construisons le système connexe au précédent. Il a la forme:

$$\overline{\omega(t_0)} + \frac{d}{ds_0}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\lg\frac{t-\overline{t}_0}{t-t_0}\,ds + \frac{d}{dS_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\frac{\overline{t}-\overline{t}_0}{t-t_0}\,ds +$$

$$+ \frac{t_0'}{t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,ds + \frac{t_0'}{t_0^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\overline{t}}\,ds\right\} = 0, \tag{5}$$

où $\omega(t)$ sont les inconnues cherchées, s est l'arc du contour, et

$$t_0' = \left(\frac{dt}{ds}\right)_{s=s_0}.$$

Introduisons les fonctions:

$$p(t_0) = \int_{a_k}^{t_0} \omega(t)\,ds \text{ sur le contour } L_k, \qquad (k = 1,2,\ldots,m+1) \tag{6}$$

où $a_1, \ldots, a_{m+1}$ sont des points fixes, choisis sur les contours respectifs pour le point de départ***.

Du système (5) il est aisé de trouver:

$$\int_{L_k} \omega(t)\,ds = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots,m+1),$$

c.-à.-d. les fonctions $p(t)$ sont continues.

---

* On peut poser $C_{m+1} = 0$.

** La propriété (3) peut être déduite aisément de la formule (1), en tenant compte du développement à l'infini. (Il suffit d'ajouter l'opérateur à l'équation correspondant au changement de t_0 à L_{m+1}).

Cette circonstance nous a été indiquée par N. I. Muschelišvili.

*** Lors de l'intégration le détour de la frontière extérieure du domaine est opposé à celui des frontières intérieures.

Ayant noté cela, et nous appuyant sur les théorèmes fondamentaux des valeurs limites de l'intégrale du type Cauchy, transformons le système (5) en

$$\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{z}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,p'(t)dt}{t-z} - \bar{z}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p'(t)dt}{t-z}\right]_i -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t_0}\left\{\int_L \frac{\omega(t)}{t}\,ds - \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}}\,ds\right\} = C_k^* \quad (k=1,2,\ldots,m+1), \qquad (7)$$

où $p'(t)=\frac{dp}{dt}$, $[\,]_i$ désigne la limite de l'expression mise entre parenthèses qui tend vers la frontière intérieure, $(z\to t_0)$, et C_k^* sont quelques constantes.

Posons:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(t)\,dt}{t-z},$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{p(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,p'(t)dt}{t-z}, \qquad (8)$$

où z est un point du domaine S.

Multipliant (7) par dt_0 et intégrant sur le contour L, nous trouverons*:

$$\int_L \left(\overline{\Phi(t_0)}dt_0 + \Phi(t_0)\,d\bar{t}_0\right) = \int_L \frac{\omega(t)}{t}\,ds - \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}}\,ds.$$

Le côté gauche de l'égalité est une valeur réelle, le côté droit — une valeur imaginaire; par conséquent,

$$\int_L \frac{\omega(t)}{t}\,ds - \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{\bar{t}}\,ds = 0. \qquad (9)$$

Le système (7) prend la forme:

$$\overline{\Phi(t_0)} - \overline{t_0}\,\Phi'(t_0) + \Psi(t_0) = C_k^* \qquad (k=1,2,\ldots,m+1). \qquad (10)$$

Posons:

$$\Phi(z)=i\Phi^*(z), \quad \Psi(z)=-i\Psi^*(z),$$

où $\Phi^*(z)$ et $\Psi^*(z)$ sont aussi réguliers dans le domaine S, et remplaçons le système (10) par le suivant:

$$\overline{\Phi^*(t_0)} + \overline{t_0}\,\Phi^{*\prime}(t_0) + \Psi^*(t_0) = iC_k^*. \qquad (k=1,\ \ldots\ ,\ m+1)$$

---

* Nous considérons le commencement des coordonnées comme situé dans le domaine S.

La détermination de $\Phi^*(z)$ et $\Psi^*(z)$ du dernier système est équivalente à la solution du problème de la théorie d'élasticité pour les forces extérieures nulles sur la frontière du domaine. D'après le théorème d'unicité un tel problème n'a de solution que lorsque tous les C_k^* sont égaux entre eux et cette solution a la forme (3):

$$\Phi^*(z) = -kiz - iC, \quad \Psi^*(z) = iC',$$

d'où

$$\Phi(z) = kz + C, \quad \Psi(z) = C',$$

où k est un nombre réel et C et C' sont en général, des nombres complexes.

Alors, en vertu du théorème de Liouville et des conditions à l'infini, nous avons:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{p(t)\,dt}{t-z} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{p(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{t}\,p'(t)\,dt}{t-z} = 0, \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{11}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\frac{p(t)\,dt}{t-z} = kz + C, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\frac{\overline{p(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{m+1}}\frac{\overline{t}\,p'(t)\,dt}{t-z} = C',$$

d'où, en tenant compte de (9), nous obtiendrons:

$$p(t) = ik_j t + B_j \quad \text{sur} \quad L_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m+1),$$

où k_j sont des nombres réels, et B_j, en général, des nombres complexes, k_{m+1} étant, égal à zéro.

Les solutions du système (5) sont les suivantes:

$$\omega_j^p = ik_j^p \frac{dt}{ds} \quad \text{sur } L_j \qquad (j = 1, \ldots, m+1;\ p = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

où

$$k_j^p = \begin{cases} 1 \text{ pour } p = j, \\ 0 \text{ pour } p \neq j, \end{cases}$$

tous les C_k^*, comme il est aisé de vérifier, étant égaux à zéro.

A présent, en partant de la régularité de $A_e(t_0)$ dans S_j, il est facile d'établir l'orthogonalité du membre libre de l'équation intégrale de Fredholm équivalente à (1) par rapport aux solutions de l'équation équivalente à (5).

Ainsi, le système (1) est soluble.

Pour prouver le théorème de l'existence par la nouvelle méthode de N. I. Muschelišvili, il reste à établir, que les solutions du système homogène (4) peuvent être représentées dans la forme (1):

$$\varphi_p(t) = \begin{cases} t + \varphi_p^0(t) + a_{pp} \text{ sur } L_p & (p = 1, \ldots, m); \\ \varphi_p^0(t) + a_{pj} \text{ sur } L_j & (j = 1, \ldots, m+1) \\ & (j \neq p), \end{cases} \tag{13}$$

où φ_p^0 est une valeur de contour de la fonction, régulière dans S^*, a_{pj} étant des constantes définies et $a_{p,\,m+1} = 0$.

---

* $\varphi_p^0(t)$ correspond à la solution du premier problème fondamental pour

$$f_1 + if_2 = -2t \text{ sur } L_p \text{ et } f_1 + if_2 = 0 \text{ sur } L_j \ (j \neq p).$$

De ce qui vient d'être prouvé par rapport à (5), il s'ensuit que le système (4) possède m, et seulement m solutions linéairement indépendantes. Elles peuvent être trouvées, en faisant l'usage des formules connues de Fredholm.

Désignons les: $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$, ..., $\chi_m(t)$.

Elles satisfont toutes aux conditions (1):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi_p(t)}{t-z}\,dt = k_j^{p*}\,z + c_j^{p*} \qquad (p=1,\ \ldots,\ m),$$

où le point z appartient au domaine S_j ($j=1,\ \ldots,\ m+1$), les nombres k_j^{p*} sont réels, les nombre c_j^{p*}, en général, complexes et $k_{m+1}^{p*} = c_{m+1}^{p*} = 0$. Introduisons les fonctions nouvelles de l'arc

$$\varphi_p(t) = l_1^p\chi_1 + l_2^p\chi_2 + \cdots + l_m^p\chi_m \quad (p=1,\ldots,m), \tag{14}$$

où $l_1^p, \ldots, l_m^p$ sont quelques nombres réels. Les fonctions $\varphi_p(t)$ satisfont aussi au système (4) et aux conditions suivantes:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)}{t-z}\,dt = (l_1^p k_j^{1*} + l_2^p k_j^{2*} + \cdots + l_m^p k_j^{m*})\,z +$$

$$(l_1^p c_j^{1*} + l_2^p c_j^{2*} + \cdots + l_m^p c_j^{m*}) \qquad (j=1,\ \ldots,\ m+1;\ p=1,\ \ldots.\ m). \tag{15}$$

Déterminons les constantes $l_1^p, \ldots, l_m^p$ des équations:

$$l_1^p k_j^{1*} + l_2^p k_j^{2*} + \cdots + l_m^p k_j^{m*} = \begin{cases} -1, & p=j \\ 0, & p\neq j \end{cases} \qquad (p,\ j=1,\ \ldots,\ m), \tag{16}$$

ce qui est toujours possilble.

En effet, le système homogène respectif correspond à l'égalité

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_p(t)}{t-z}\,dt = l_1^p c_j^{1*} + l_2^p c_j^{2*} + \cdots + l_m^p c_j^{m*},$$

où

$$\varphi_p(t) = \varphi_p^*(t) - (l_1^p c_j^{1*} + l_2^p c_j^{2*} + \cdots + l_m^p c_j^{m*}) \begin{pmatrix} p=1,\ \ldots,\ m; \\ j=1,\ \ldots,\ m+1 \end{pmatrix}$$

la fonction $\varphi_p^*(t)$ étant régulière dans le domaine S, et correspondant au problème de la théorie d'élasticité pour les forces extérieures nulles sur la frontière. En vertu des propriétés (3) elle est aussi égale à zéro.

Alors du système (4) nous obtiendrons:

$$\varphi_p(t) = 0,$$

d'où, en conséquence de l'indépendance linéaire $\chi_j(t)$ ($j=1,\ \ldots,\ m$),

$$l_j^p = 0 \qquad (j,\ p=1,\ \ldots,\ m).$$

Ainsi, le déterminant du système (16) est différent de zéro.

Ayant déterminé les valeurs l_j^p, nous trouverons les fonctions $\varphi_p(t)$ ($p=1,\ldots,m$) satisfaisant aux conditions (13).

Le système original (1) peut être remplacé par un autre, aux fonctions fondamentales élémentairement calculables. En effet, soient p_j des points

fixés arbitrairement dans les domaines S_j, $(j = 1, \ldots, m)$. Déterminons les constantes $\overline{C_j}$ dans les équations (1) en égard à la condition:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(t)}{t - p_j}\,dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \ .$$

Nous obtiendrons:

$$\overline{C_j} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f_1 - if_2}{t - p_j}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t - p_j} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,d\bar{t}}{\bar{t} - \bar{p}_j} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\,\varphi'(t)\,dt}{t - p_j} \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Substituant les valeurs trouvées de C_j dans (1), nous trouverons un nouveau système soluble *. Chacune de ses solutions satisfait à la condition

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t - z}\,dt = B_j \qquad (j = 1, \ldots, m + 1),$$

où B_j sont certains nombres complexes, B_{m+1} étant égal à zéro. Comme il est facile d'établir, le système homogène correspondant possède les $2m$ solutions suivantes linéairement indépendantes:

$$\varphi_p = \begin{cases} R\varphi_p = 1 & \text{sur } L_p \\ 0 & \text{sur } L_j \ (j \neq p) \end{cases}; \quad \varphi_p^{\neg} = \begin{cases} I\varphi_p = 1 & \text{sur } L_p \\ 0 & \text{sur } L_j \ (j \neq p) \end{cases}$$

$$(j = 1, \ldots, m + 1;\ p = 1. \ldots, m),$$

où R et I sont les symboles des parties réelle et imaginaire.

Institut Séismologique
de l'Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 4. XII. 1935.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] N. I. Muschelišvili, C. R. Acad. Sci., URSS, III, № 1,2. [2] S. G. Michlin, Publications de l'Inst. Séism., № 65. — D. J. Schermann, ibid., № 53. [3] N. I. Muschelišvili, Quelques problèmes de la théorie d'élasticité, C. R. Acad. Sci. URSS, (1935.)

* On peut le démontrer en tenant compte que le système (1) a toujours une solution.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

MATHÉMATIQUES

SUR UN COUPLE DE CONGRUENCES

Par S. BACHVALOV

(Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 26. XII. 1935)

Quelle que soit une congruence L de droites, on peut déterminer sur chaque rayon de cette congruence deux points A_0 et A_3 qui engendrent les surfaces A_0 et A_3, dont les asymptotiques se correspondent.

En effet, si B_0 et B_3 sont deux surfaces qui engendrent la congruence L, les surfaces A_0 et A_3 seront déterminées par les équations:

$$A_0 = B_0 + \lambda_0 B_3, \quad A_3 = B_0 + \lambda_3 B_3, \tag{1}$$

où λ_0, λ_3 sont les solutions de deux équations aux dérivées partielles du second ordre,

$$\frac{D_0(u, v, \lambda_0)}{D_3(u, v, \lambda_3)} = \frac{D_0'(u, v, \lambda_0)}{D_3'(u, v, \lambda_3)} = \frac{D_0''(u, v, \lambda_0)}{D_3''(u, v, \lambda_3)}. \tag{2}$$

Dans les équations (2), D_0, D_0', D_0'', D_3, D_3', D_3'' sont les coefficients des premières formes projectives quadratiques des surfaces A_0 et A_3.

La droite d'intersection des plans tangents aux surfaces citées en les points homologues engendre la seconde congruence du couple L.

Ainsi la congruence $L(A_0A_3)$ se transforme à l'aide des surfaces A_0 et A_3 en une seconde congruence $L_1(A_1A_2)$.

Dans la présente note nous donnons des équations qui déterminent le couple de congruences L, L_1, et traitons de quelques propriétés de ce couple.

Soit $A_0A_1A_2A_3$ un tétraèdre mobile qui engendre ce couple de congruences; plaçons-en deux sommets, A_0 et A_3, en des points des surfaces A_0 et A_3, les deux autres sommets, A_1 et A_2, en les foyers des rayons correspondants de la seconde congruence L_1.

Le déplacement du tétraèdre dans l'espace euclidien projectif est déterminé par le système d'équations (1):

$$dA_j = \omega_{j0}A_0 + \omega_{j1}A_1 + \omega_{j2}A_2 + \omega_{j3}A_3, \tag{3}$$

où $j = 0, 1, 2, 3$.

Les formes différentielles $\omega_{ij} = a_{ij}du + b_{ij}dv$ satisfont aux équations (1)

$$\omega_{ij}^{\parallel} = [\omega_{i0}\omega_{0j}] + [\omega_{i1}\omega_{1j}] + [\omega_{i2}\omega_{2j}] + [\omega_{i3}\omega_{3j}]. \tag{4}$$

Les plans $A_0A_1A_3$ et $A_3A_1A_2$ étant tangents respectivement aux surfaces A_0 et A_3, nous avons:

$$\omega_{03} \equiv 0, \quad \omega_{30} \equiv 0. \tag{5}$$

Par admission, A_1 est le foyer du rayon A_1A_2 de la congruence L_1; il s'ensuit alors de l'équation

$$dA_1 = \omega_{10}A_0 + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_{13}A_3$$

qu'une famille de surfaces développables de la congruence L_1 est déterminée simultanément par les deux équations:

$$\omega_{10} = 0, \quad \omega_{13} = 0. \tag{6}$$

Ici, deux cas sont possibles:
1) Une des formes (6) s'annule identiquement.
2) Les formes (6) sont linéairement dépendantes.
Il est aisé de voir que dans le premier cas A_0 ou A_3 est une surface développable ou un plan. Soit $\omega_{13} \equiv 0$; dans ce cas l'équation différentielle des lignes asymptotiques s'écrira

$$\omega_{02} \cdot \omega_{23} = 0\,(^1). \tag{7}$$

De l'equation $\omega_{03} = 0$ il découle que

$$[\omega_{02} \cdot \omega_{23}] = 0. \tag{8}$$

Si $\omega_{02} \equiv 0$ ou si $\omega_{23} \equiv 0$, une ligne quelconque sur la surface A_0 sera asymptotique; si $\omega_{23} = \rho\omega_{02}$, l'équation (7) s'écrira

$$\rho \cdot \omega_{04}^2 = 0. \tag{9}$$

Ainsi donc, deux familles de lignes asymptotiques coïncident, et par conséquent, la surface A_0 est développable.
Le cas des plans et des surfaces développables exclu, nous avons:

$$\omega_{10} = t\omega_{13}. \tag{10}$$

Supposant ensuite que le second foyer de la congruence coïncide avec A_2, nous obtenons la condition:

$$\omega_{20} = s\omega_{23}. \tag{11}$$

Des équations (10, 11) et de la conformité asymptotique des surfaces A_0 et A_3 il découle que (1)

$$\omega_{31} = \frac{\theta}{t}\,\omega_{01}, \quad \omega_{32} = \frac{\theta}{s}\,\omega_{02}. \tag{12}$$

Ainsi donc, le couple de congruences (L, L_1) est déterminé par le système d'équations:

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{10} = t\omega_{13}, \quad \omega_{31} = \frac{\theta}{t}\,\omega_{01}, \quad \omega_{03} = 0, \\ &\omega_{20} = s\omega_{23}, \quad \omega_{32} = \frac{\theta}{s}\,\omega_{02}, \quad \omega_{30} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

En différentiant extérieurement ce système nous obtenons

$$[T(d)\omega_{13}] + (t-s)[\omega_{12}\omega_{23}] = 0, \quad [S(d)\omega_{23}] + (s-t)[\omega_{21}\omega_{13}] = 0, \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\theta(d) - \frac{\theta}{\tau}T(d),\ \omega_{01}\right] + \left[\omega_{21}\omega_{02}\right]\left(\frac{t}{s} - 1\right) = 0, \\ \left[\theta(d) - \frac{\theta}{s}S(d),\ \omega_{02}\right] + \left[\omega_{12}\omega_{01}\right]\left(\frac{s}{t} - 1\right) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$[\omega_{01}\omega_{13}] + [\omega_{02}\omega_{23}] = 0, \quad (16)$$

où

$$\theta(d) = d\theta + 2\theta(\omega_{00} - \omega_{33}), \quad T(d) = dt + t(\omega_{00} - \omega_{33}),$$

$$S(d) = ds + s(\omega_{00} - \omega_{33}).$$

Il s'ensuit des équations (13—16) que les couples de congruences dépendent de deux fonctions arbitraires de deux arguments indépendants.

Considérons quelques propriétés de ces couples de congruences.

1) Les foyers Φ_1 et Φ_2 de la congruence A_0A_3 sont déterminés par les équations

$$\Phi_1 = \theta A_0 - s \cdot A_3, \quad \Phi_2 = \theta \cdot A_0 - t \cdot A_3. \quad (17)$$

Nous trouvons de là que

$$\left.\begin{aligned} d\Phi_1 = (\ldots)A_0 + \omega_1\left(1 - \frac{s}{t}\right)\theta A_1 + (\ldots)A_3, \\ d\Phi_2 = (\ldots)A_0 + \omega_2\left(1 - \frac{t}{s}\right)\theta A_2 + (\ldots)A_3. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Il s'ensuit de ces équations que les plans tangents aux surfaces focales Φ_1 et Φ_2 passent respectivement par les foyers A_1 et A_2 de la seconde congruence.

2) Exigeons que le plan tangent à la surface focale A_1 passe par le foyer Φ_1 du rayon de la première congruence.

Il s'ensuit de l'équation

$$dA_1 = \omega_{10} \cdot A_0 + \omega_{11} \cdot A_1 + \omega_{12} \cdot A_2 + \omega_{13} \cdot A_3$$

et de la première équation du système (17) que

$$\frac{\omega_{10}}{\theta} = -\frac{\omega_{13}}{S} \quad \text{ou} \quad \theta = -t \cdot s.$$

Il est aisé de voir que le plan tangent à la surface focale A_2 passe par Φ_2; de plus, la congruence A_0A_3 est stratifiable dans deux directions:

3) Considérons les congruences A_0A_1 et A_3A_1.

L'un des foyers de la congruence A_0A_1, coïncide avec A_0; l'autre, M, est déterminé par l'équation

$$M = A_0 + \lambda A_1, \quad (19)$$

où λ satisfait à l'équation

$$\omega_{02} + \lambda\omega_{12} = 0, \tag{20}$$

avec la condition que l'on ait $\omega_{13} = 0$.

De la même manière nous trouvons que l'un des foyers de A_3A_1 est déterminé par l'équation

$$N = A_3 + \mu A_1, \tag{21}$$

où μ satisfait à l'équation

$$\frac{\theta}{s}\omega_{02} + \mu\omega_{12} = 0, \tag{22}$$

avec la condition que l'on ait $\omega_{13} = 0$.

Des équations (20) et (22) nous déduisons que

$$\mu = \lambda\frac{\theta}{s}. \tag{23}$$

Il s'ensuit des équations (19), (21), (23) et (17) que le point $\bar{S} = \theta \cdot M - s \cdot N$ coïncide avec Φ_1.

Ainsi donc, les trois foyers Φ_1, M, N des trois congruences A_0A_3, A_0A_1, A_3A_1 sont disposés sur une seule et même droite.

D'une façon analogue on peut démontrer que les trois foyers Φ_2 R, F des trois congruences A_0A_3, A_0A_2, A_3A_2 sont aussi disposés sur une seule et même droite.

Faculté de Mathématiques et de Mécanique de l'Université.
Moscou.

Manuscrit reçu le 26. XII. 1935.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Fubini et Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des urfaces, P., 1931.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

THEORETISCHE MECHANIK

ÜBER DIE WAHRSCHEINLICHKEIT DER STABILITÄT NACH LIAPUNOFF

Von N. MOISEJEV (MOISSEIEV)

(Vorgelegt von N. Lusin, Mitglied der Akademie, d. 21. XII. 1935)

In einer unserer vorhergehenden Arbeiten (1) haben wir gezeigt, dass die Liapunoff'sche Stabilitätstheorie nur als eine spezielle Abart einer gewissen allgemeineren Theorie zu betrachten ist, die von uns «Theorie der Berührungscharakteristiken» benannt wurde.

Aus dieser Bemerkung folgt u. a. unmittelbar die Möglichkeit die Liapunoff'sche Theorie einer Anzahl der verschiedenartigsten Vervollkommnungen und Verallgemeinerungen zu unterwerfen. In diesem Aufsatze geben wir ein Beispiel davon.

Es sei

$$x_1^0(t) \equiv x_2^0(t) \equiv \ldots \equiv x_n^0(t) \equiv 0 \tag{1}$$

der untersuchte Bewegungszustand und

$$x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t) \tag{2}$$

irgendeiner der «gestörten» benachbarten Bewegungszustände für das Problem, das durch das Gleichungssystem

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

definiert ist.

Betrachten wir die «Kugel»

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R_1^2 \leqslant R_3^2 = \text{Konst.} \tag{4}$$

Die Bewegungen, die durch die Bedingung bestimmt sind, dass zu einem gewissen anfänglichen Zeitpunkt

$$t = t_0$$

die Ausgangswerte der Veränderlichen:

$$x_s \qquad (s = 1, 2, \ldots n)$$

derart sein sollen, dass der Punkt mit den Koordinaten:

$$x_1(t_0),\ x_2(t_0),\ \ldots,\ x_n(t_0) \tag{5}$$

innerhalb der Kugel (4) gelagert sei, können in nachfolgende zwei Klassen eingeteilt werden

1) S-Bewegungen, für welche ein Punkt mit den Koordinaten (2) zu keinem

$$t > t_0$$

aus dem Inneren mindenstens einer von den Kugeln:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R_2^2 < R_3^2, \tag{6}$$

heraustreten kann, deren Halbmesser R_2 eine beliebige eindeutige, stetige, bei Abnahme von R_1 nicht zunehmende Funktion von R_1 ist, welche der Bedingung:

$$\lim_{R_1=0} R_2 = 0 \tag{7}$$

genüge leistet; und

2) J-Bewegungen, die der obigen Klasse nicht angehören.

Demgemäss können wir die Menge M der innerhalb der Kugel (4) eingeschlossenen Punkte (5) in zwei Untermengen, wie folgt, teilen:

SM, d. i. die Menge, deren jeder Punkt eine Bewegung der von Klasse S gibt, und JM, d. i. die Menge, deren jeder Punkt eine Bewegung von der Klasse J gibt. Jetzt können wir folgende Definition formulieren:

Die Stabilitätswahrscheinlichkeit PS der Bewegung (1) ist dem Limes gleich, gegen welchen der Quotient: Mass der Menge SM geteilt durch Mass der Menge M, konvergiert, wenn der Halbmesser R_1 nach Null strebt, d. h.

$$PS = \lim_{R_1 \to 0} \frac{\mathfrak{M}(SM)}{\mathfrak{M}(M)}. \tag{8}$$

Auf ganz analoge Weise können auch die Definitionen folgender wichtiger Begriffe eingeführt werden: Asymptotismuswahrscheinlichkeit, Zyklismuswahrscheinlichkeit und, schliesslich, Unstabilitätswahrscheinlichkeit. So wird zum Beispiel die letztgenannte durch die Formel

$$PJ = \lim_{R_1 \to 0} \frac{\mathfrak{M}(JM)}{\mathfrak{M}(M)} \tag{9}$$

definiert.

Wenn wir die Liapunoff'sche Ausdrucksweise vom Standpunkt der vorhergehenden Definitionen betrachten, so bemerken wir, dass die Klasse der Bewegungen, die nach Liapunoff als stabil bezeichnet werden können, nur ein Teilgebiet der Klasse bildet, welche die Bewegungen umfasst, deren Stabilitätswahrscheinlichkeit gleich Eins ist. In der Tat, damit die gegebene Bewegung im Sinne von Liapunoff als stabil gelte, ist es notwendig, dass die Menge JM eine Nullmenge sei, während es, hinreicht um die Stabilitätswahrschein lichkeit auf Eins zu bringen, dass das Mass $\mathfrak{M}(JM)$ dieser Menge JM gleich Null sei. Aus dieser Bemerkung allein dürfte schon die grosse Bedeutung einleuchten, welche die oben eingefürten Begriffe für die allgemeine Theorie ebensogut wie für deren spezielle Anwendungen haben können.

Von den verschiedenen Verallgemeinerungen, denen diese Begriffe unterzogen werden können, wollen wir hier nur eine einzige berühren, die uns als eine der wichtigsten scheint.

Im obigen haben wir alle möglichen Anfangswerte der Veränderlichen x_s als gleichwahrscheinlich angenommen. Diese Zulassung führte uns ja gerade zur Definition der Stabilitätswahrscheinlichkeit als eines Limes des Quotienten der Masse der entsprechenden Mengen. Doch sollte überhaupt die Voraussetzung viel natürlicher sein, dass verschiedene «Anfangsstörungen» auch verschiedene Wahrscheinlichkeiten besitzen könnten. Die Verteilung dieser Wahrscheinlickeiten liesse sich durch irgendwelche zutreffende Funktion $F(x_s)$ darstellen, die auf den Punktmengen M, SM und JM auf irgendeine wohlbestimmte Weise definiert sein kann. Demgemäss werden wir dann auch in diesem allgemeineren Falle die Stabilitätswahrscheinlichkeit $PS(F)$ als ein Limes definieren, dem der Quotient der Stieltjes'schen Integrale der Verteilungsfunktion F, erstreckt über die Menge SM bzw. M, zustrebt, wenn der Halbmesser der Kugel (4) gegen Null konvergiert; d. h.:

$$PS(F) = \lim \frac{\int\limits_{SM} F \cdot d\mathfrak{M}(SM)}{\int\limits_{M} F \cdot d\mathfrak{M}(M)}. \tag{10}$$

Es erübrigt zu bemerken, dass die vorhergehenden Definitionen nicht nur für den einzigen Fall gelten, der bisher von der Liapunoff'schen Theorie untersucht wurde (d. h. für den Fall, wo die Mengen M, SM und JM vom Typus stetiger n-dimensionaler Teile des n-dimensionalen euklidischen Raumes sind) — sondern ebensogut auch für allgemeinere Fälle, die in den Anwendungen vorkommen können (z. B. für den Fall, wenn M, SM und JM vom Typus diskreter Punktmengen sind usw.).

Es ist auch aus Obigem ersichtlich, dass die Theorie der bedingten Stabilität nach Liapunoff [2] als ein Spezialfall einer umfassenderen Theorie zu betrachten ist, die auf den vorstehenden Bemerkungen aufgebaut werden kann. Zum Schluss wäre noch darauf hinzuweisen, dass völlig analoge Bemerkungen auch in bezug auf die Theorie der Stabilität bei endlichen Amplituden, auf die sogenannte Stabilitätstheorie en grand (im Sinne von N. Kryloff und N. Bogoljuboff) [1, 3, 4] sich verwerten lassen.

Staatsinstitut für Sternkunde.
Moskau.

Eingegangen
d. 21. XII. 1935.

ZITIERTE LITERATUR

[1] Н. Моисеев, О некоторых общих методах качественного анализа проблем небесной механики, ч. 1: О методе контактных характеристик в случае двух степеней свободы, Труды Гос. астрономического ин-та, т. 7 (1935) [2] А. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения, Харьков (1892) [3] Н. М. Крылов и Н. Боголюбов, Новые методы нелинейной механики, ГТТИ, 1934. [4] Крылов и Боголюбов, Новые методы для решения некоторых проблем, встречаемых в технике, В. (1933)

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

PHYSICS

CHANGES OF ABSORPTION OF WEAK ELECTRIC FIELDS OF HIGH FREQUENCY IN CERTAIN SUBSTANCES AS A FUNCTION OF THE STRENGTH OF THESE FIELDS. II

By E. K. ZAVOISKIJ AND B. M. KOZYREV

(Communicated by S. I. Wawilow, Member of the Academy, 7. I. 1936)

In our preceding paper we showed that liquid acetic acid has a number of «critical strengths» of the high frequency electrical field E_k. In the interval of the change of E_k from 130 to 180 $\frac{V}{cm}$, we discovered 14 such E_k. We showed that the E_k are invariable with respect to temperature (from 18 to 40° C) and to the concentrations of water in the acid.

In the present paper we have to deal with two problems: 1) whether the E_k of liquid acetic acid do or do not change after its freesing; 2) whether the E_k of solid acetic acid are maintained for CH_3 COONa. Along with these measurements, we obtained the E_k for solid acetic acid in the region of field strengths from 343 to 457 $\frac{V}{cm}$.

Let us consider these problems separately.

1. For the measurements with solid CH_3COOH, we cooled the room where the apparatus was set up to approximately 0° C. Carefully dried crystals of solid acetic acid were enclosed in the measuring condenser, which was then heated to 20° C and again cooled to 0° C. In this manner the solid acetic acid completely filled the condenser. The condenser was cooled by a strong current of air from the ventilator. The rest of the measuring was carried on as described in the foregoing paper. It must be added, however, that in the measurements with solid acetic acid we encountered several purely technical difficulties (too rapid rise of the strength of the alternating electrical field in the presence of an increasing of anode intensity), which made our measurements somewhat rough in this case. This fact very likely also explains the absence for the solid acid of some E_k which were found for the liquid acid.

These measurements are shown in Table 1. The second column of the table shows the E_k for liquid CH_3COOH, and the third, for the solid one. From these data the conclusion may be drawn that the E_k do not change when the liquid acid passes into the solid form within the interval of the strength measured. This very interesting fact shows once more that the existence itself of E_k is owing to some kind of intramolecular processes.

2. The curve $J_g = J_g\ (Va)$ for solid CH_3COONa studied in the interval, approximately, from 375 to 480 $\frac{V}{cm}$, shows, likewise, the presence of a number of «critical strengths».

In order to compare the curve for CH_3COONa with the curve for CH_3COOH in the same interval of from 375 to 480 $\frac{V}{cm}$, solid carefully dried CH_3COOH was also studied.

The values of the E_k for CH_3COONa and CH_3COOH, found by the graphic method used by us, are shown in Table 2.

Table 1

Nos	E_k for liquid CH_3COOH in $\frac{V}{cm}$	E_k for solid CH_3COOH in $\frac{V}{cm}$
1	158.0	158
2	160.9	—
3	164.0	163.5
4	166.3	165.7
5	170.0	—
6	172.7	171.5
7	175.4	176.5
8	182.9	183.0

What stands out prominently in this table is, first of all, the identical number of E_k in both cases. But it is impossible to decide the question of whether the E_k remain in their former positions in the curve or whether for CH_3COONa we have a certain displacement, since the measurements were not, in this case, sufficiently accurate.

In every case, it can be asserted that the substitution of sodium for hydrogen does not essentially change the value of E_k—at least in the interval of 100 volts (from 375 to 480).

Table 2

Nos	E_k for solid CH_3COOH in $\frac{V}{cm}$	E_k for solid CH_3COONa in $\frac{V}{cm}$
1	379.0	377.0
2	411.0	403.0
3	428.0	432.0
4	440.0	448.0
5	468.0	468.0
6	478.0 (?)	480.0

Further we intend to investigate the influence of the frequency of the field on the value of E_k. According to the data we now dispose of, the change of frequency does not exert a strong influence on the E_k.

Investigation of the curves $J = J\ (Va)$ for acetic acid in non-aqueous solutions, as also for the halogen derivatives of this acid, would also appear to promise great interest. These investigations may perhaps make it possible to determine to what interamolecular process the E_k owe their origin. In particular, a working out of the problem of the E_k of acetic acid may possibly explain the fact previously observed by us of the acceleration of the dissolution reaction of FeS in strong acetic acid by means of an electric field of high frequency(1).

University. Kazan.

Received
4. I. 1936.

REFERENCES

[1] Е. К. Завойский, Б. И. Ковырев и А. В. Несмелов, Ученые записки Казанского университета, вып. 1 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

GEOPHYSICS

THE ORIGIN OF THE PERIODIC VARIATIONS OF THE REGIME OF ATLANTIC CURRENTS

By V. V. ŠULEJKIN, Corresponding Member of the Academy, and N. D. YERŠOVA

In the two preceding works ([1], [2]) the authors had succeeded in ascertaining a quantitative dependance between the thermal regime of different continental zones and the heat flows arisen over the waters of the World Ocean and entering the continents across the coast line.

Among all these powerful sources of heat the heat flows coming from Gulfstream and its northern ramifications have quite an exceptional importance. In particular the sudden changes of the climate of the USSR and of all Europe, observed in the recent years, have been stimulated by the changes in the regime of the warm Atlantic currents.

But what is the origin of such considerable variations of their regime? Where is the source of the variations to be looked for? What does the obvious periodicity in the changes of the temperature of the Atlantic waters depend upon? These questions have interested the oceanographers a long time ago (Nansen, Schott, etc.), but practically the insufficience of the data available has prevented them from the solving of this problem.

The same questions arose again in 1928—1932 in connection with the works of Sandström ([3]), who had succeeded in tracing the gradual propagation of some «temperature impetus» from the coasts of America to the North Polar Basin and in forecasting the periods of the maximum temperature and small quantity of ice in this basin.

His theory of the «Gulfstream pulsations arising in the source of the current» has been accepted by the Soviet hydrologists and the formal extrapolation based upon it and made in several separate cases has proved to be in good accordance with reality. It is easy to show, however, that the physical basis of this theory is w r o n g and that it cannot explain the nature of the thermal regime variations.

The first contradiction arises already at the first glance at the table, where the declinations from the mean year temperatures of the Florida current waters are given.

We can see that in the sources of Gulfstream the temperature of its principal flow does not practically change from year to year. Though the second flow — the Antille one — making a part of Gulfstream, is studied very little, but there are reasons to think it also constant from the point of view of the

Declinations of the annual mean temperatures from the mean temperature of 14 years

Place \ Year	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925
Florida Straits	−0°.6	−0°.5	0°	+0°.1	0°	−0°.1	+0°.3
Isl. Dickson*	—	—	−0°.8	−1°.1	+1°.8	+2°.0	−2°.5

Place \ Year	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932
Florida Straits	0°	+0°.4	0°	+0°.1	−0°.1	−0°.2	+0°.4
Isl. Dickson*	−0°.7	−0°.7	+0°.7	+3°.0	−1°.6	—	+3°.5

thermal regime, and then it has only a secondary importance as compared to the Florida current.

But in spite of such a constancy of the thermal regime of the principal source of the warm Atlantic current, its northern branches, undoubtedly, show very pronounced temperature variations as it may be seen from the third line of figures of the table (near the island Dickson, where it can be observed essential influence of the northern branche entering in the Kara-Sea from the North).

Hence the first important conclusion can be drawn:

The origin of the temperature variations of Atlantic current is not to be found in the roots of Gulfstream.

The second contradiction to the views accepted arises at the comparison of the curves expressing the temperature variations in several points of the Atlantic situated at nearly the same longitude but at different latitudes.

As an instance it is sufficient to examine the curves reproduced on Fig. 1, where the upper curve corresponds to the highmost latitude and the inferior one, to the lowest.

It can be seen that the temperature variations in the examined points of the Atlantic are displaced according to a phase, but in the direction opposite to that one might expect having admitted the existence of some variation generator within the limits of the Atlantic itself. The Fig. 1 shows very clearly that the interdisposition of the phases can be explained only by the existence of some temperature wave entering the Atlantic from the North. This is the second important conclusion which can be drawn on the basis of facts.

The third conclusion drawn both on the basis of facts and on the basis of the preceding two is as follows:

Without any predetermination as to the origin of the temperature variations, we ought to suppose that they propagate (contrary to the

* Near the Dickson island—the mean temperatures for 3 summer months.

watch hand) along the close outline «Cape Ras — Cape Hatteras — the sources of Gulfstream — the Newfoundland bank (its eastern side) — the Faroer Islands — Spitzbergen (the western and then the northern coast) — a circle around the Polar Basin (along the northern coasts of Franz Joseph Land, Northern Land and the other archipelagoes, along the coasts of the Canadian Archipelago) — the straits along the western and eastern coasts of Greenland — Cape Ras». No definite starting point had been taken at the description of this outline.

Let us now try to find the cause of the rise of variations within this outline, having reproduced it on the scheme of Fig. 2, where the outstanding points

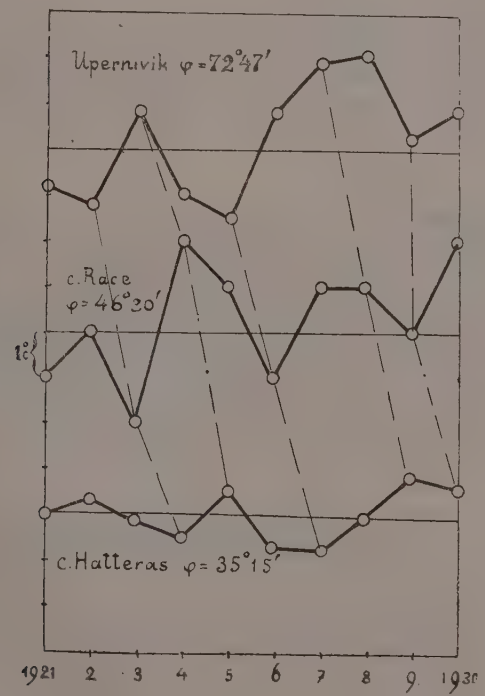


Fig. 1.

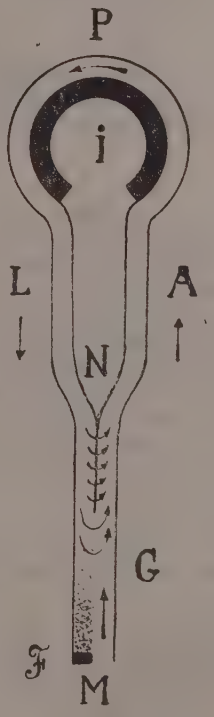


Fig. 2.

of the currents are represented. Namely, *M* is the Gulf of Mexico, *F* — Florida peninsula, *N* — New foundland, *P* — the Polar Basin, *G* — Gulfstream, *A* — the North Atlantic current, *L* — the Labrador current. The black arch «*I*» denotes the polar ice.

At the present time it is difficult to draw an accurate conclusion as to the interaction of the waters of the Labrador current and the Gulfstream, but at any rate it is utterly obvious that the former prove to be c u t from the open part of the Atlantic as if by a warm wall of the latter. It is perfectly evident, too, that the Labrador waters c o o l the Gulfstream ones and make a part of warm waters either sink deeper (due to the lowering of the temperature and the growth of density) or to go to the north with a lowered temperature.

Both these phenomena lead, finally, to the decrease of the heat debit of the Atlantic current*.

The ice must play quite a peculiar, highly remarkable part in the system examined. Indeed, let the state of balance of the Polar Sea at a certain heat contain Q_0 in the water of the Atlantic current (adapted to point N) be characterised by a certain amount of ice I_0 in the Polar Basin. Now let us suppose that the heat content of the Atlanticcurrent has increased by some reason to a certain value Q. Then, having neglected for the present the space factors (for instance, the distance NP), we shall have to conclude that the amount of ice in the Polar Basin will decrease according to the law that can be formulated as follows:

$$\frac{dI}{dt} = -f(Q - Q_0), \qquad (1)$$

here $f(Q-Q_0)$ denotes a certain unknown function which may be expand into a power series. In the first approximation let us take only the first term of this series and let us suppose that

$$\frac{dI}{dt} = -m(Q - Q_0), \qquad (2)$$

where m is a factor of proportionality.

Till the ice did not melt anomal, it did not tell on the variation of regime of the Labrador current, because the temperature of the latter could be practically considered as equal to 0°. But the supplementary melted ice, firstly, supplied a certain additional amount of cold water transported to Newfoundland, and secondly it liberated a certain quantity of ice, which now got access to lower latitudes. In both these ways the additional mass of melted ice $(I-I_0)$ must lower the heat debit of the warm current in the region where the mixing takes place and where the regime of the branch A is formed. It is easy to express the lowering of the heat content in a equation similar to (2):

$$\frac{dQ}{dt} = +n(I - I_0). \qquad (3)$$

Having differentiated (2) a second time in accordance with time and substituted to $\frac{dQ}{dt}$ in the second part of the equation obtained its value from (3), we shall find:

$$\frac{d^2I}{dt^2} = -m\frac{dQ}{dt} = -mn(I - I_0), \qquad (4)$$

or, otherwise,

$$\frac{d^2(I - I_0)}{dt^2} + mn(I - I_0) = 0. \qquad (5)$$

The second equation will be found in a similar way:

$$\frac{d^2(Q - Q_0)}{dt^2} + mn(Q - Q_0) = 0. \qquad (6)$$

From the differential equations (5) and (6) one can see that the Polar ice transforms the Atlantic Ocean and the Polar Basin adjoining to it into an autooscillating system.

---

* In proportion with their progress to the south, the waters of the Labrador current grow more and more saline and thanks to that they sink at last to the deeper layers without reaching the Gulf of Mexico (this circumstance is represented by dots on Fig. 2). That is why the thermal regime of the Florida current does not depend at all upon the regime of the Labrador one.

On the basis of (5) and (6) the oscillation period of this system must be equal to

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{mn}} \tag{7}$$

Let us now take the neglected space factors represented on Fig. 2. We shall have to add several new features to the above mentioned ones. First of all, in going round the whole outline the contents of heat of the waters will vary according to the law:

$$Q_s = Q_{0s} + q_s \sin[\omega t - \varepsilon(u, s)] \tag{8}$$

where Q_{0s} denotes the «balance» value of the heat contents in a point removed to a distance s from some arbitrary yet fixed once for all starting point. The phase displacement $\varepsilon(u, s)$ will be the function of this distance s and of the current velocity u at different points. The preceding analysis will remain correct, if it proves that exactly o n e temperature wave (or an entire number of these waves) can be disposed along the whole outline. In particular, we can accurately reckon in the formula (8):

$$\omega = \sqrt{mn} \tag{9}$$

Otherwise «b e a t i n g s» will arise in the outlins surrounded with currents; *i. e.* the amplitude itself of the oscillations of the thermal regime w i l l v a r y; the epochs characterized by sudden climate variations will be follwed by more monotonous ones. The period can also be changed.

It stands to reason that we have not yet exhausted the number of different impediments altering the picture in natural conditions (the damping and stimulation of new variations, the not accurate conservativity of the system, the influence of warm flows breaking into the Polar Basin from the Pacific through the Bering Strait, etc.). Future will show to what extent these phenomena are patent to quantitative though approximate analysis.

Institute of Physical Geography.
Academy of Sciences of the USSR,
Department of Theoretical Geophysics.

Received
29. 1. 1936.

REFERENCES

[1] В. В. Ш у л е й к и н, Атлантические воды и климат СССР, Изв. ОМЕН, № 6 (1935). [2] Н. Д. Е р ш о в а, Влияние мирового океана на температурный режим материков, Журн. геофиз., (in press). [3] J. W. S a n d s t r ö m, Der Golfstrom und das Wetter, Gerl. Beitr. z. Geophys. (1931), Köppenband H., S. 254.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

BIOPHYSIK

MESSUNGEN DES WIDERSTANDES DES MENSCHLICHEN KÖRPERS UND SEINER ABHÄNGIGKEIT VON DER STROMSTÄRKE IN EINEM WEITEN FREQUENZBEREICH

Von N. N. MALOV

(Vorgelegt von S. J. Wavilow, Mitglied der Akademie, d. 29. XII. 1935)

Die Untersuchung des Widerstandes des menschlichen Körpers bei Wechselströmen hat, neben einer grossen praktischen Bedeutung für Medizin und Physiologie, auch ein erhebliches theoretisches Interesse für das Verständnis der Ionenprozesse, die in Geweben bei Entstehung eines elektrischen Feldes sich abspielen.

Vorhergehende Untersuchungen, bei welchen ein Differentialtransformator (1), ein Voltamperemeter-Verfahren(2) und eine Wheatstone'sche Brücke (3) benutzt wurde, haben erwiesen, dass der Widerstand des Körpers einer Kombination von hintereinandergeschalteten Ohm'schen Widerstande r_0 und Kapazität K_0 äquivalent ist. Bei entsprechender Auswahl von Grösse und Lage der Elektroden (z. B., an beiden Handflächen) ist es möglich, die gesamte Impedanz des Körpers in zwei Teile zu trennen: die innere Impedanz (r_i, K_i), welche durch die Prozesse in den inneren Geweben bestimmt ist, und die äussere Impedanz (r_a, K_a), welche vom Zustande der Haut abhängt. Diese Grössen sind durch folgende Gleichungen verknüpft:

$$r_0 = r_i + 2r_a; \quad \frac{1}{K_0} = \frac{1}{K_i} + \frac{2}{K_a}. \tag{1}$$

Die äquivalente Impedanz eines jeden von diesen Teilen bestimmt sich mittels der Gleichung

$$Z_p = \sqrt{r_p^2 + \left(\frac{1}{\omega K_p}\right)^2}, \qquad (p = i, a, 0) \tag{2}$$

wo $\omega = 2\pi f$ die Stromfrequenz darstellt. Die Zahlenwerte der gemessenen Z_p r_p und K_p, sowie auch ihre Abhängigkeit von der Frequenz veranlassen uns anzunehmen, dass sie durch die Polarisationserscheinungen hervorgerufen sind; diese Polarisation kann an halbdurchlässigen Membranen in den Körpergeweben stattfinden.

Eine Bestätigung dieser Annahme kann man, z. B., in den Gesetzen finden, die die Abhängigkeit der Reizströme von der Frequenz bestimmen(4); diese Gesetze kann man mit Hilfe der Ionentheorie der Reizung theoretisch begründen(5).

Bei unseren Untersuchungen des Widerstandes des menschlichen Körpers wurde eine objektive Methode benutzt — die Methode des Kathodenstrahloszillographen. Der Oszillograph hatte zwei Kondensatoren für die Ablenkung des Kathodenstrahles. Ein Röhrengenerator wurde durch einen Zwischenkreis mit dem Messkreise induktiv gekoppelt. Im Messkreise befanden sich, hintereinander geschaltet, eine Kopplungsspule, ein Strommesser, ein bekannter rein-ohmischer Widerstand R, und das Objekt mit einer Impedanz Z_p. Einer von den Kondensatoren des Oszillographen wurde dem Widerstand R, der zweite dem Objekte Z_p parallel geschaltet. Die Kondensatoren konnte man abwechselnd oder gleichzeitig einschalten. Im ersten Falle erhielten wir am Leuchtschirm des Oszillographen zwei ortogonale Geraden (Achsen), im zweiten Falle beschrieb der Kathodenstrahl eine Ellipse (bei sinusförmiger Spannungskurve). Diese Bilder wurden photographiert; aus den Oszillogrammen konnte man die Impedanz des Körpers Z_p, sowie auch deren Bestandteile (r_p, K_p) einzeln bestimmen (die Mehrzahl der Messungen wurde von S. Tokarev ausgeführt).

Bei ganz tiefen Frequenzen wurde eine Gleich-Wechselstrom-Maschine benutzt.

Die Messungen wurden im Frequenzbereich vom 4 Hz bis 750 kHz gemacht. Sie zeigten, dass die Werte von Z_p, r_p und K_p bei hohen Frequenzen klein und fast unveränderlich sind. Bei Abnahme der Frequenzen nehmen alle Grössen zu, indem alle Kapazitäten (K_0, K_i K_a) und die gesamten und äusseren Widerstände (Z_0, Z_a, r_0, r_a) sehr schnell steigen; die Steigerung des inneren Widerstandes (Z_i, r_i) ist geringer. Bei ganz tiefen Frequenzen verlangsamt sich diese Steigerung, insbesondere bei Z_0, Z_i, r_0, r_a und r_i.

Die Abhängigkeit dieser Grössen von der Frequenz ist in Tab. 1. dargestellt.

Tabelle 1

Abhängigkeit des Widerstandes des menschlichen Körpers von der Frequenz (in willkürlichen Einheiten)

Frequenz	5	50	500	5 000	50 000	500 000 Hz
Z_0	244	117	26.3	4.57	1.58	1
Z_i	—	4.97	2.00	1.51	1.23	1
r_0	—	83	14.5	2.52	1.38	1
r_i	—	—	1.86	1.45	1.20	1
K_0	—	49	24.4	12	5.63	1
K_i	—	—	676	117	10.7	1

Der Ausfall einiger Daten bei ganz tiefen Frequenzen liegt daran, dass man mit sehr kleinen Stromstärken arbeiten musste (siehe unten), wobei die Ellipsen so klein wurden, dass eine leidlich genaue Berechnung der Bestandteile der Impedanz (r, k) unmöglich war.

Bei tiefen Frequenzen wurde eine bedeutende Abhängigkeit der gemessenen Werte von der Stromstärke festgestellt, die weiterhin speziell untersucht wurde. Es wurde gezeigt, dass die Z_p- und r_p-Werte mit steigender Stromstärke abnehmen, die K_p-Werte aber zunehmen. Diese Erscheinung kann man vom Standpunkte der Ionentheorie erklären.

Tatsächlich, wenn ein Strom

$$i = i_0 \sin \omega t \tag{3}$$

den Körper durchfliesst, so entsteht wegen der Polarisation eine elektromotorische Kraft

$$e = A \ln \frac{c}{c_0}, \tag{4}$$

wo

$$\frac{c}{c_0} = 1 + B \frac{i_0}{\sqrt{\omega}} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right); \tag{5}$$

hier bedeutet: c_0 — die anfängliche und c — die bei Stromdurchgang sich einstellende Konzentration der Ionen bei halbdurchlässigen Membranen, A und B sind Konstanten.

Aus den Gleichungen (3)—(5) kann man folgende Ausdrücke für K und r erhalten (den Index p lassen wir, der Kürze halber, ungeschrieben):

$$r = r_\infty + \frac{D}{K_0 \sqrt{2\omega}}; \quad K = \frac{K_0 \sqrt{2}}{D \sqrt{\omega}}, \tag{6}$$

wo r_∞ den Ohmischen Widerstand bei sehr hohen Frequenzen (praktisch, bei Frequenzen von 300—500 kHz) bedeutet, K_0 ist eine Konstante und

$$D = 1 - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \frac{Bi_0}{\sqrt{\omega}} + \frac{\pi^2}{72}\left(\frac{Bi_0}{\sqrt{\omega}}\right)^2 - \frac{\pi^3}{560\sqrt{2}}\left(\frac{Bi_0}{\sqrt{\omega}}\right)^3 + \dots \tag{7}$$

Es ist zu bemerken, dass die Grösse D, die durch eine Reihenentwickelung der Gleichung (4) bestimmt ist, kleiner als Eins sein muss; d. h., dass unsere Berechnung nur für nicht zu hohe Stromstärken zutrifft. Der Grenzwert der Stromstärke lässt sich aus der Gleichung

$$B \frac{i_0}{\sqrt{\omega}} \leqslant 1 \tag{8}$$

bestimmen.

Aus Gleichung (6) kann man schliessen, dass bei steigender Stromstärke der Ohm'sche Widerstand r (sowie auch Z) abnimmt; die Kapazität K muss aber zunehmen. Da im Falle des Körpers die gesamte r bei tiefen Frequenzen ($f < 50$ Hz) etwa 100 mal so gross ist, wie r_∞, so erhalten wir für die gesamte Impedanz Z_0 folgende einfache Gleichung:

$$Z_0 = \frac{DK_0}{\sqrt{\omega}}. \tag{9}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man aus zwei gemessenen Werten von Z_0 (bei verschiedenen Stromstärken) die Grösse B bestimmen, sowie auch die Grenzstromstärke i_{gr} und den Grenzwert der Impedanz (bei ganz schwacher Stromstärke). Auch ist es möglich die Abweichungen der gemessenen Z_0-Werte vom Grenzwert zu berechnen. Tab. 2 enthält die Grenzwerte der Stromstärke und die Stromstärken, bei welchen die gemessenen Z-Werte um 10. v. H. kleiner sind, als der Grenzwert der Impedanz Z_0 (bei ganz schwachen Strömen). Die experimentelle Bestätigung dieser Berechnungen fiel ziemlich gut aus (bei Strömen, die den Grenzwert nicht überstiegen).

Tabelle 2

f	10	100	1 000	10 000	100 000	Hz
i_{gr}	1.32	4.47	13.2	41.7	132	mA
i bei $\frac{Z_{gem}}{Z_{gr}} \geqslant 0.9$	0.128	0.69	2.18	6.9	21.8	mA

Zum Schluss ist zu bemerken, dass bei sehr grossen Stromstärken, die eine nahezu unerträgliche Reizung hervorrufen (bei tiefen Frequenzen), eine sehr interessante Verzerrung der Ellipse stattfindet; die Enden der Ellipse verlängern sich und die Kurve erinnert an eine Hysteresisschleife. Die Kontrollmessungen zeigten, dass in diesem Falle die Spannungskurve am Objekte eine Sinuskurve mit abgeschnittener Spitze darstellt, was man auch auf Grund von Gleichung (4) erwarten konnte. Die physikalische Bedeutung dieser

Verzerrung liegt in der Annahme, dass die Abstände zwischen benachbarten halbdurchlässigen Membranen so klein sind, dass bei grossen Spannungsamplituden fast alle Ionen innerhalb von Zeitintervallen, die kleiner sind als eine Viertelperiode der Spannung, an die Membranoberflächen gelangen können. In diesem Falle halten sie sich einige Zeit an den Membranoberflächen auf, und die Form der Spannungskurve muss von der Sinuskurve abweichen.

Demnach lässt sich erwarten, dass eine genaue Untersuchung dieser Erscheinung für die Ermittelung der Anordnung der Membranen innerhalb des Körpers eine grosse Bedeutung gewinnen kann.

Es ist aber noch zu bemerken, dass überhaupt unsere Theorie, die auf der von Nernst gegebenen Gleichung (4) sich gründet, nur als annähernd gültig zu betrachten ist; dieses ist, z. B., daraus zu ersehen, dass sie für r, K und Z Abhängigkeiten von der Frequenz ergibt, die nur in einem engen Frequenzbereich mit dem Experimente übereinstimmen.

Staatliches Röntgen-Radiologisches Institut.
Moskau.

Eingegangen
d. 29. XII. 1935.

ZITIERTE LITERATUR

[1] N. Malov u. S. Rschevkin, ZS. f. Hochfrequ., **35**, 177 (1930). **39**, 93, (1932). [2] N. Malov, Hochfrequ. u. Elektroak., **41** (1933). [3] M. Gildemeister, Pflüg. Arch., **219**. 84 (1928). [4] N. Malov u. S. Rschevkin, Pflüg. Arch., **218**, 708 (1928).—W. Nernst, Pflüg. Arch., **122**, 275 (1908). [5] P. Lasareff, ZS. f. angew. Physik (russisch). **4**, № 6 (1927). [6] W. Nernst, Pflüg. Arch., **122**, 284 (1908).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

CHEMIE

NEBENOXYDATIONSPROZESSE BEI REDUZIEREN VON NITROVERBINDUNGEN DER AROMATISCHEN REIHE

ÜBER DIE ROLLE EINES SALZES VON ZWEIWERTIGEM EISEN IM REDUKTIONSPROZESS

Von K. MISUČ (MISUTSCH)

(Vorgelegt von N. Demjanov, Mitglied der Akademie, d. 15. XII. 1935)

Bei Reduzieren von Nitroverbindungen der aromatischen Reihe inmitten von Haloidwasserstoffsäuren mit Zinn, Zink und einigen anderen Metallen ergaben sich ausser den Aminen auch deren Haloidsubstituierte in Ortho- und Para-Stellungen zur Aminogruppe (1). In den Arbeiten von Stelzner (2) Bamberger(3), Blanksma(4) wird die Bildung haloidsubstituierter Amine durch Umgruppierung eines hypothetischen *N*-Haloidamins erklärt, welches sich im Laufe des Reduktionsprozesses aus Arylhydroxylamin und Haloidwasserstoffsäure bilden soll.

In vorliegender Arbeit wird gezeigt, dass bei Durchführung der Reduktion inmitten von Haloidwasserstoffsäuren (HF, HCl, HBr) die Gegenwart eines Salzes von zweiwertigem Eisen die Bildung von haloidsubstituierten Aminen ausschliesst und eine Erklärung der vom Ferrisalz in diesem Prozess gespielten Rolle wird gegeben.

Die Untersuchung des Einflusses von Fe vollzog sich in für die Bildung von haloidsubstituierten Aminen optimalen Verhältnissen, als welche namentlich eine «verlängerte», über mehrere Stunden hinausgedehnte Zugabe des Metalls und die Arbeit während eines anhaltenden Siedezustandes in Gegenwart von Haloidwasserstoffsäure in Überschuss (Blanksma) hinzustellen sind. In diesen Bedingungen erhielten wir, bei Reduktion von Nitrobenzol, Amine mit einem Gehalt an Haloidsubstituierten bis zu 61 %. Gleichzeitig konnte, bei Reduktion von Nitrobenzol in den gleichen Verhältnissen, in Gegenwart von Ferrisalz, die Menge der haloidsubstituierten Amine bis auf Null herabgesetzt werden, je nach dem Quantum des aufgewandten Eisens.

Zur Reduktion von 5 g Nitrobenzol wurde 100 ml 6.86 *n*-Haloidwasserstoffsäure (HF, HCl, HBr) verwandt und metallisches Zinn in einer Menge von 7.5g oder ein gleichwertiges Quantum $SnCl_2 . 2H_2O$ «Kahlbaum» pro anal.

In eine Retorte von 500 ml Kapazität werden 5 g Nitrobenzol, 50 ml Essigsäure und 100 ml 6.86 *n*-HBr-Lösung eingebracht. Der Inhalt der Retorte wurde bis zu schwachem Sieden erwärmt und im Laufe von 7 Std. 7.5 g feine Zinnspäne zugesetzt. Nach Abschluss der Sn-Zugabe wurde der

Einfluss von Fe auf die Menge der sich bildenden Ortho- und Para-Haloid-Amine bei Reduktion von Nitrobenzol

Nummer des Versuchs	Auf 1 Mol Nitrobenzol Ferrisalz in Molen aufgewandt	Prozentsatz von Haloidanilin im Anilin nachgewiesen	Reduktionsmittel
1	0	61.0	Sn + HCl
2	0.25	3.1	
3	1.0	0	
4	0	44.85	Sn + HBr
5	0.25	5.9	
6	1.0	0	
7	0	57.2	$SnCl_2$ + HCl
8	0.25	5.9	
9	1.0	0	

Retrorteninhalt noch 30 Min. in siedendem Zustand unterhalten. Aus dem alkalinischen Medium wurde er mit Äther extrahiert.

a) Der Rest nach Extraktion wurde nach Schotten-Baumann benzoyliert. Gefunden ein Dibenzolderivat von 4-Aminophenol im Betrage von 0.1 g.

b) Der Ätherauszug wurde mit 2.5%-ger Salzsäure extrahiert und der Gesamtgehalt an Aminen mit dem Diazotierungsverfahren nachgewiesen. Bei bekanntem Gesamtgehalt der Amine wird die Menge des haloidsubstituierten Amins nach Francis u. Hill [5] bestimmt, nach welchen zum Bromieren der Ortho- und Para-Substituierten des Anilins 4 g-Äquivalent von Br erforderlich sind, während Anilin selber 6 g-Äquivalent Br benötigt.

Mit dem Diazotierungsverfahren wurde an Aminen, auf Anilin umgerechnet, 3.310 g nachgewiesen. Mit dem Bromierungsverfahren—2.815 g. An Bromderivaten des Anilins wurde, auf das Monobromderivat umgerechnet, 44.85 % gefunden. Das aus dem Amingemenge ausgesonderte Bromanilin wurde nach der Schmelztemperatur von 64—65° C als 4-Bromanilin identifiziert.

c) Aus dem Ätherrest wurden gelbliche ölartige Tropfen im Betrage von 0.13 g ausgeschieden,—als Azoxybenzol bestimmt. Eine Analyse der Produkte einer in denselben Verhältnissen ausgeführten Reduktion von Nitrobenzol in Gegenwart von 8.76 $FeBr_2$ erwies:

1) dass nach Benzoylierung des alkalinischen Restes kein Benzoylderivat sich bildete.

2) Eine salzsaure Lösung der Amine wurde nach dem oben erörterten Verfahren analysiert. Gefunden an Aminen nach dem Diazotierungsverfahren in Umrechnung auf Anilin 3.457 g, nach dem Bromierungsverfahren 3.453 g. Die Übereinstimmung der Ergebnisse der Analyse des Amingemenges nach den beiden Methoden weist auf Abwesenheit von bromsubstituiertem Anilin hin. Das Produkt ist benzoyliert. Die Schmelztemperatur des nicht umkristallisierten Benzoylderivats beträgt 163 — 164°C—damit wird Anilin identifiziert.

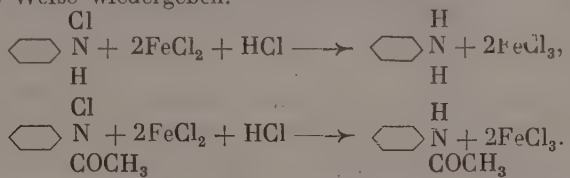
3) Nach Verdampfen des Ätherrestes wurden gelbe ölige Tropfen im Betrage von 0.04 g gefunden, welche weiter nicht untersucht worden sind.

Von der Annahme ausgehend, dass die Bildung von haloidsubstituierten Aminen bei Reduktion von Nitroverbindungen, der Stelzner-Bamberger-Blanksma'schen Vermutung gemäss, sich unter Bildung eines hypothetischen *N*-Haloidamins abspielt, untersuchten wir den Reaktionsmechanis-

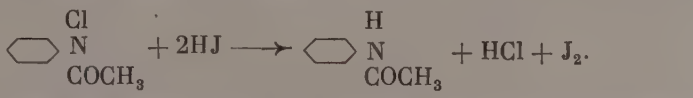
mus in Gegenwart von Fe am verhältnismässig stabilen *N*-Acetylderivat des *N*-Chloramins.

Wir konnten feststellen, dass bei Einführung einer Alkohollösung von *N*-Chloracetanilid in eine Lösung von Eisenchlorid in verdünnter Chlorsäure, eine Reduktion des *N*-Chloracetanilids zu Acetanilid (ohne Bildung von haloidsubstituiertem Produkt) stattfindet mit gleichzeitiger Oxydation des Fe zum dreiwertigen. Ein parallel ausgeführter Versuch, in den gleichen Bedingungen, aber in Abwesenheit von Eisenchlorid, erwies eine quantitative Umwandlung des *N*-Chloracetanilids in ein Gemenge von *o*- und *p*-Chloracetaniliden. Eine Analyse der so entstandenen *o*- und *p*-Chloranilide nach Hydrolyse der Acetylgruppe ergab Abwesenheit sogar jeglicher Beimengung von nicht substituiertem Anilin.

Die in Gegenwart von Fe'' stattfindenden Reaktionen lassen sich auf nachfolgende Weise wiedergeben:



Es ist interessant diesen Daten die Bildung von nichtsubstituierten Aminen bei Reduktion von Nitroverbindungen in Jodwasserstoffsäure und die Wirkung von *N*-Chloracetanilid auf saure Lösung von Jodkali gegenüberzustellen, welche von Bildung nichtsubstituierten Acetanilids mit gleichzeitiger quantitativer Jodausscheidung begleitet werden:



Die Fähigkeit des zweiwertigen Fe unter Einfluss von nicht ausgeschiedenen Reduktionszwischenprodukten (in unserem Falle von *N*-Chlor- u. *N*-Bromanilin) in dreiwertiges überzugehen unter gleichzeitiger Reduktion des *N*-Haloidamins zum Amin, diese Fähigkeit liefert uns gerade die Erklärung für die Tatsache, dass bei Reduktion durch metallisches Eisen in Haloidwasserstoffsäuren, zum Unterschied von einer Reihe anderer Metalle, keine Bildung von haloidsubstituirten Aminen auftritt.

Die festgestellte Gesetzmässigkeit gilt allgemein nicht nur für Nitrobenzol, sondern ebensogut für die andere aromatischen Nitroverbindungen.

Die Untersuchung der unmittelbaren Reduktionsprodukte hat erwiesen, dass in allen Fällen neben der grossen Menge von haloidsubstituierten Aminen auch geringere Mengen von 4-Aminophenol und von Azoxyverbindungen gebildet werden. Der grosse Unterschied zwischen den sich bildenden haloidsubstituierten Aminen und der Summe von Oxyaminen und Azoxyverbindungen kann einerseits durch die grössere Geschwindigkeit der Reaktion zwischen Phenylhydroxylamin und Salzsäure erklärt werden und andererseits durch die Ungleichheit der Umwandlungsgeschwindigkeiten von Phenylhydroxylamin in 4-Aminophenol und *N*-Haloidamin in Haloidanilin.

Schlussfolgerungen

1. Die Gegenwart von Ferrisalzen bei Reduktion von Nitroverbindungen der aromatischen Reihe verhindert die Bildung von haloidsubstituierten Aminen.

2. Der Mechanismus der dabei sich abspielenden Reaktion besteht in einer Oxydation des zweiwertigen Fe durch das als Zwischenprodukt entstehende *N*-Haloidamin mit gleichzeitiger Reduktion des *N*-Haloidamins zu Amin.

3. Die besondere Stellung des Fe unter den bei der Reduktion zur Verwendung gelangenden Metallen wird erklärt.

Analytisches Laboratorium des Instituts Woroschilov für Halbprodukte und Farbstoffe. Moskau.

Eingegagen d. 15. XII. 1935.

ZITIERTE LITERATUR

[1] H. Meyer. Analyse und Konstitutionsermittelung organischer Verbindungen, S. 619, Berlin, 1931. [2] Stelzner, B. **29**, 306 (1896). [3] Bamberger, B., **28**, 254 (1895); B., **35**, 3697 (1902). [4] C. Blanksma, **I**, 463 (1907); Dikshoorn Rec. (4), **48**, 148 (1929). [5] Francis a. Hill, Journ. Amer. Chem. Soc. **46**, 2498 (1924); Jiehe Day Taggert, Ind. and Engin. chem., **20**, 545 (1928).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

BIOCHEMISTRY

FLAVINS AND METABOLISM

V. THE EFFECT OF THE INTRODUCTION OF ALLOXAN AND THYMONUCLEIC ACID INTO THE FOOD OF RATS ON THE FLAVIN CONTENT IN THEIR LIVER

By A. J. CHARIT (CHARITE) and N. V. CHAUSTOV (KHAUSTOV)

(Communicated by A. A. Richter, Member of the Academy, 17. XII. 1935)

Differences in the food consumed result in different flavin content of the animal's tissues. This may be due to two causes: in the first place, the presence of a certain amount of flavins in the food itself; in the second, the possible synthesis of flavins from substances closely related to the latter in their structure.

Alloxan, a ureid, and thymo-nucleic acid which contains thymin, a substance of heterocyclic structure, are closely related to the heterocyclic part of flavin. The question arose as to whether an addition of these substances to the food of the rats might not promote the formation of flavins and their deposition in the tissues of these animals.

For the elucidation of this problem, a series of tests were made. The test animals chosen were three sets of white rats, aged 3—4 weeks. All the three sets were provided with ordinary laboratory diet ensuring their normal development.

The first group was kept for control. The diet of the second group contained a daily dose of 1 mg alloxan, and the diet of the third group contained 1 mg nucleic acid. The tests lasted for 3—4 weeks. At the end of that time the rats were killed, and the flavin content in the liver determined by Charit and Chaustov's method (1). The data are given below.

Results of Feeding with Aloxan

Control	Test
γ %	γ %
16.7	16.06
19.3	19.8
18.6	19.3
18.2	18.3

Results of Feeding with Nucleic Acid

Control	Test
γ %	γ %
5.68	7.32
7.98	8.92
7.36	11.0
7.00	9.74

The results of the experiment with alloxan showed no divergence in the data for the liver of the experimental and control rats. In rats fed with thymo-nucleic acid, however, a slight increase was observed, amounting to 2 γ or, on an average, 28%. Still, even this increase does not necessarily point to a synthesis of flavins, since the preparation of thymo-nucleic acid contains traces of flavins, and their accumulation might account for their deposition in the bodies of the animals.

Our experiments have, therefore, conclusively proved that these subtances in no wise promote the synthesis of flavins in the body of the animal.

While these experiments were in progress, an article appeared by Guha and Chakravarty [2] containing data on the impossibility of replacing vitamin B_2 with xanthin, adenin, or alloxan. Feeding with these substances failed to eliminate the characteristic symptoms of avitaminosis B_2. Our data, obtained independantly of these authors prove the same, but from another point of view, namely from that of fluctuation in the flavin content in the liver.

Academy of Sciences of the USSR,
Institute of Biochemistry,
and 2d Leningrad Medical Institute,
Biochemistry Department.

Received
17. XII. 1935.

BEFERENCES

[1] Charite u. Khaustov, C. R. Acad. Sci. URSS, III, No 5, 386 (1934); Biochem. Journ., **29**, 34(1935). [2] Guha and Chakravarty, Journ. Indian Chem. Soc., **11**, 295, 310 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

PHYSIOLOGIE

LA RÉPARTITION DANS LE SANG ET L'INTENSITÉ D'ACTION DES ANESTHÉSIQUES

Par N. LAZAREV

(Présenté par L. Orbeli, de l'Académie, le 17. XII. 1935)

Notre laboratoire a obtenu récemment une série de données concernant les concentrations anesthésiques de diverses substances dans le sang des grenouilles et des mammifères (souris blanches, lapins). Il nous a paru intéressent de calculer, d'après des données d'une part provenant de nos propres recherches, de l'autre empruntées à la littérature spéciale, quelle quantité de chaque substance se trouve à l'état de véritable solution aqueuse et quelle autre quantité, par contre, est «liée» par le sang d'une autre manière quelconque, par exemple, adsorbée par les matières protéiques du plasme ou bien par les surfaces structurelles des éléments figurés, dissoute dans les lipoïdes etc. (par la suite nous dirons pour abréger «anesthésique dissous» et «anesthésique lié»). Ceci est d'autant plus important que nous devons calculer l'intensité comparative d'action des différents anesthésiques en partant des concentrations anesthésiques non pas dans le sang, mais en solution physique dans la composante aqueuse du sang, car l'anesthésique «lie» dans le sang n'a pas d'influence sur sa concentration dans les tissus au moment de l'équilibre (cette idée peut être signalée déja chez Overton). Si les coefficients de solubilité dans l'eau des vapeurs ou des gaz anesthésiques et leurs concentrations anesthésiques dans l'air et dans le sang nous sont connus (ou bien — pour les substances, pour lesquelles les faits sont puisés dans la littérature — les coefficients de solubilité dans le sang), nous pouvons calculer approximativement, quelle quantité maximale de l'anesthésique peut se trouver dans ces conditions dans le sang à l'état de solution physique aqueuse. Par exemple: la concentration anesthésique du protoxyde d'azote dans le sang humain est à peu près de 0.02 mols par litre. Ses coefficients de solubilité dans le sang et dans l'eau sont presque égaux (le premier à la température de 36° est de 0.4844, le second à la température de 37° —de 0.49). Partant de ce fait, que le sang contient près de 80% d'eau (pour simplifier nous ne tenons pas compte ici de ce qu'une partie de l'eau se trouve à l'état «lié» et ne peut servir de dissolvant à l'anesthésique), nous reconnaissons que la solution physique ne peut contenier plus de 0.016 mols par litre et que 0.004 mols environ de l'anesthésique doivent être «liés» par le sang. Le rapport $\frac{\text{anesthésique «lié»}}{\text{anestésique «dissous»}}$ est de près de 0.2.

Les données ainsi obtenues et consignées dans la table suivante (voir colonne 1) ne peuvent prétendre à une grande précision et ne sauraient servir de base pour l'établissement de quelque loi quantitative rigoureuse. Néanmoins, leur juxtaposition permet de déceler aves une grande netteté quelques phénomènes intéressants.

Comparons les intensités d'action relatives des anesthésiques (voir colonne 2) déterminées par le calcul des concentrations de ces substances en so-

Substance	Quantité en solution aqueuse en mols par 1 litre de sang	Intensité d'action relative	K, $\frac{\text{anesthésique «lié»}}{\text{anesthésique «dissous»}}$	K, $\frac{\text{huile}}{\text{eau}}$
	1	2	3	4
Azote	0.04	1.0	0.13	3—5
Acétylène	0.017	2.3	0.2—0.3 *	2.1
Protoxyde d'azote	0.016	2.5	0.2	2.3
Ether éthylique .	0.013	3.0	0.2	4.5
Méthane	0.035	11.4	0.5	19—20
Ethylène	0.0025	16.0	0.8—1.25 *	14.6
Chlorure d'éthyle.	0.0017	23.0	0.8—2.0 *	24—30
Chloroforme . . .	0.0006	67.0	3.3	30—33
Benzène	0.00025	160.0	0.8	300—350
Cyclohexane . . .	0.00007	570.0	4.4	7 500—8 000
Pentane	0.000035	1 140.0	11.0	4 000
Hexane	0.000013	3 080.0	22.0	18 000—18 500
Heptane	0.0000055	7 270.0	53.5	44 000—53 000

* Pour divers animaux.

ulution physique dans le sang et la répartition de ces mêmes substances dans le sang (voir colonne 3). Il se trouve qu'en général, plus est grande l'intensité d'action anesthésique de la substance—plus est grand le rapport $\frac{\text{anesthésique «lié»}}{\text{anesthésique «dissous»}}$.

Autrement dit, les anesthésiques forts se trouvent dans le sang surtout à l'état «lié», les faibles de préférence—en solution physique. Ce fait paraît naturel en partant du point de vue, que les anesthésiques sont partiellement «lié» par les lipoïdes du sang. En effet, le rapport $\frac{\text{anesthésique «lié»}}{\text{anesthésique «dissous»}}$ et le coefficient de partage de l'anesthésique entre l'huile d'olive et l'eau varient dans le même sens pour la série des substances comparées.

Cependant Brusilovskaja(1) a démontré, que la concentration des carbures d'hydrogène dans le sang (par exemple du benzène) ne dépend pas (quand ils sont administrés par voie respiratoire) de la quantité des lipoïdes dans le sang. Parmi les substances soumises à notre examen comparatif se trouvent l'éthylène, le chlorure d'éthyle, le chloroforme, pour lesquels Scotti-Foglieni(2) a démontré qu'ils sont fixés non pas par les lipoïdes, mais par l'hémoglobine du sang. Comme parmi les substances comparées par nous ces trois anesthésiques se soumettent à la loi générale, il est loisible d'admettre que les faits déterminés par Scotti-Foglieni sont en général valables pour les autres anesthésiques également.

De là on est amené à croire que l'hémoglobine fixe une quantité d'anesthésique d'autant plus grande que le coefficient $\frac{\text{huile}}{\text{eau}}$ de cet anesthésique est plus grand et que l'action anesthésique de ce dernier est plus forte.

Cette conclusion sera vérifiée par nous dans une série d'expériences spéciales.

Laboratoire toxicologique de l'Institut d'hygiène du travail et des maladies professionnelles. Leningrad.

Manuscrit reçu le 17. XII. 1935.

LITTÉRATURE CITÉE

1 Брусиловская, Физиологический журнал СССР, № 7 (1935). 2 Scotti-Foglieni, C. R. de la Soc. de biologie, **105**, **106**, **107** (1930. 1931).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

GENETICS

STUDIES ON POLYPLOID PLANTS. XIII

By DONTCHO KOSTOFF

HAPLOID *NICOTIANA RUSTICA*

(Communicated by N. I. Vavilov, Member of the Academy, 25. XII. 1935)

During the last decade a series of haploid plants were found in the genus *Nicotiana*. The majority of them were the result of parthenogeneticaly developed egg cells induced by the presence of foreign pollen-tubes introduced into the micropylle following the interspecific hybridization (6), while three haploid plants were produced androgenetically [*sensu* Kostoff(8)], which developed from sperm cells of the pollen-tubes that enter the embryo sac of another species or species hybrid (3,8,11,12).

The largest number of haploid plants in *Nicotiana* were produced from the species *N. tabacum* ($n=24$). It is an amphidiploid of the hybrid *N. sylvestris*×*N. Rusbyi* (*tomentosiformis*) or some form of the group *N. tomentosa* (2,10,11). Haploid plants in *N. tabacum* were described by Clausen and Mann (4). Chlipman and Goodspeed (1), Ruttle (16), Clausen and Lammerts (3), McCray (15), etc. A few haploids were produced in *N. glutinosa* ($n=12$) by Goodspeed and Avery (7) and by Weber (17), while single haploid plants were produced by the author in *N. Langsdorffii* ($n=9$) (8) and in *N. sylvestris* ($n=12$)(11). Haploid plants with 24 somatic chromosomes were also obtained from the triple fully fertile hybrid *N. tabacum*×(*N. sylvestris*×*N. Rusbyi*) which normally has 48 somatic chromosomes and is constant in respect to the chromosome number. It was shortly called *N. triplex* (10). The halpoids *N. triplex* were almost identical with the F_1-hybrids *N. sylvestris*×*N. Rusbyi*. They were produced from the crosses *N. triplex*×*Petunia violacea*.

Nicotiana rustica is a tobacco species that has as many somatic chromosomes as *N. tabacum* and *N. triplex*, *i. e.* 48, and was used very often in crossing experiments for producing species hybrids (5,9), but a haploid plant was not produced until the present time. Often diploid plants were produced parthenogenetically (9) but a haploid plant was first produced during the last summer (1935) (M. Ternovski told me that he also had had a haploid *N. rustica*).

N. rustica haploid was produced after pollination of a variety of *N. rustica* from the Tartar Republic with pollen from *N. tabacum* var. Xanty Yaka. Crosses between the varieties of *N. rustica* with the varieties of *N. tabacum* were carried out for us on a large scale at the Nikitski Sad Genetic

Laboratory during the year 1934, and the haploid plant was found among the material of the crosses carried out in Nikitski Sad (Crimea). We have here the opportunity to express our great gratitude to the scientific workers and to the technicians from Nikitski Sad that kindly did the crosses for us. Here we shall consider only the haploid plant, while the hybrids obtained will be described elsewhere.

N. rustica haploid began to flower several days before the diploid plants. It was smaller in size than the diploids and all of the organs were somewhat

Fig. 1.

reduced, the flowers, however, were most strikingly reduced (Fig. 1). Haploid *N. rustica* set a few seeds after selfing during the summer, while in autumn all of the flowers dropped without setting any seeds. The somatic chromosome number of the plant with the small flowers was first determined in the root tips. 24 chromosomes were counted in the metaphase plates (Fig. 2). Thus it was found that the plant was haploid. The haploid plant has smaller cells than the diploid ones. We measured the length of the stomata cells, and the data obtained are given in Table 1.

Table 1

The Length of the Stomata Bord Cells from the Leaves in Microns

Plants	24	27	30	32	35	40	43	46	49	51	54	57	59
Haploid	8	24	40	16	3	—	—	—	—	—	—	—	—
Diploid	—	—	—	—	—	9	12	10	9	6	7	3	2

The studies of the reduction division in the haploid plant showed that usually 24 univalent chromosomes appeared during the diakinesis, first metaphase and anaphase in the pollen mother cells. Autosyndetic bipartids (pseudobivalents) such as bivalents were very rarely observed. Such a «bivalent» is drawn in Fig. 3 during the anaphase disjunction from a pollen mother

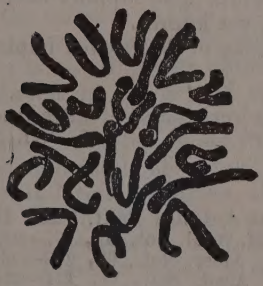


Fig. 2.

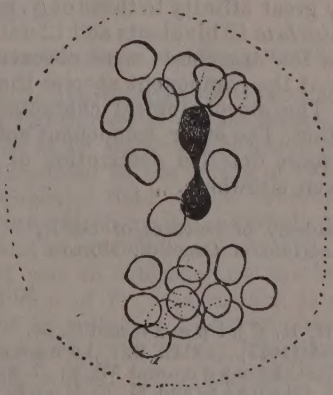


Fig. 3.

cell. Such type of bivalents and disjunctions were more frequently observed in the pollen mother cells of the haploid plants *N. Langsdorffii* and *N. sylvestris* [13] than in *N. rustica*, although *N. Langsdorffii* has $n=9$ and *N. sylvestris* has $n=12$, while *N. rustica* has $n=24$, *i. e.* twice as many chromosomes as *N. sylvestris*.

The chromosomes in *N. rustica* haploid distribute themselves usually at random during the first anaphase and divide usually during the second division. Division of univalent chromosomes during the first meiosis was rarely observed. 25 or 26 chromosomes (altogether) were counted during the second metaphase in both plates only in a few cases. Non-occurrence of chromosome distribution during the first division was a usual phenomenon. It led to dyad formation. This phenomenon occurred more frequently in autumn than in summer. In summer we counted about 10—15% of dyads, while the counts made in autumn are given in Table 2.

The pollen grains were examined in acetocarmine preparations. 30 out of 124 were full with cytoplasm and stained deep red while the other 94 were shrunken and empty and did not stain. The majority of the pollen grains which contained cytoplasm germinated on the stigma of *N. rustica* and *N. tabacum* plants. The germinated pollen grains were also studied in acetocarmine preparations.

Table 2

Number of Microspores Counted in Autumn (End of October) in the Pollen Mother Cells of the Haploid *N. rustica* during the «Tetrad» Stage

One (Monads)	Two (Dyads)		Three (Triads)	Four (Tetrads)	Five (Pentads)
	Equal	Unequal			
1	41	5	8	32	1

The abscence (usually) of autosyndetic association of the chromosomes during the meiosis in the haploid *N. rustica* suggests that the species *N. rustica* is an allopolyploid. It should be noted here that the species *N. paniculata* crosses readily with *N. rustica*, that chromosomes of *paniculata* have a very great affinity to those of *N. rustica* and that in the F_1-hybrids *rustica* × × *paniculata* 12 bivalents and 12 univalents are usually formed, but sometimes even a few trivalents were observed ([14]). This indicates that *N. paniculata* is one of the component species that has participated in the origin of *N. rustica*. The morphological characters of *paniculata* also support such an assumption. The other component species is not yet known.

A more detailed description of the behaviour of *N. rustica* haploid will be given elsewhere.

Academy of Sciences of USSR,
Institute of Genetics, Moscow.

Received
25. XII. 1935

REFERENCES

[1] R. H. Chipman and T. H. Goodspeed, Univ. Calif. Publ. Bot., **11**, 141—158 (1927). [2] R. E. Clausen, Univ. Calif. Publ. Bot., **11**, 177—211 (1928). [3] R. E. Clausen and W. E. Lammerts, Amer. Nat., **63**, 279—283 (1929). [4] R. E. Clausen and M. C. Mann, Proc. Nat. Acad. Sci., **11**, 121—124 (1924). E. M. East, Genetics, **20**, 403—451 (1935). [6] A. Ernst, Bastardierung als Ursache der Apogamie im Pflanzenreiche, G. Fischer, Jena (1918). [7] T. H. Goodspeed and P. Avery, Proc. Nat. Acad. Sci., **15**, 502—504 (1929). [8] D. Kostoff, ZS. Zellforsch. mikr. Anat., **9**, 640—642 (1929). [9] D. Kostoff, Genetica, **12**, 33—129 (1930). [10] D. Kostoff, Bull. Appl. Bot. Gen. Plant Breed., ser. II, No 5, pp. 167—205 (1933). [11] D. Kostoff, Nature, **133**, 949—950 (1934). [12] Д. Костов, Природа, 44—49 (1934). [13] D. Kostoff, C. R. Acad. Sci. URSS, v. I, No 5, pp. 330—332 (1935). [14] D. Kostoff and I. Rajably, Bul. Acad. Sci. URSS, **1**, 115—1 (1935). [15] F. A. McCray, Bot. Gaz., **93**, 227—230 (1932). [16] M. Ruttle, Univ. Cal. Publ. Bot., **11**, 213—232 (1927). [17] J. M. Weber, Journ. Agric. Res., **47**, 845—868 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume I (X), № 5 (82)

GENETICS

A HAPLOID PLANT OF DURUM WHEAT, *TRITICUM DURUM* DESF

By B. VASILJEV

(Communicated by A. A. Sapehin, Member of the Ukraïnian Academy, 27.XII. 1935)

In the course of our work on interspecific hybridization of wheats conducted in the summer of 1934, we pollinated 120 flowers of durum wheat, *Triticum durum melanopus* 069, with the pollen of *Tr. monococcum flavescens*.

Only two grains were obtained by pollination. In the spring of 1935 both were planted in the ground in the experimental field of the Laboratory of Genetics of the Peterhof Biological Institute. Both grains sprouted, producing plants hereafter called Plant 582-1 and Plant 582-2 respectively.

Morphologically speaking, Plant 582-1 was an intermediate one between the parent forms. Its spike, similarly to that of *Tr. monococcum*, is devoid of waxy bloom, the number and length of its spikelets, however, being practically the same as in the case of *Tr. durum* (*cf.* the Table). The plant had heavily pubescent nodes, a characteristic, which, taken together with the sterility of the plant, proves it beyond doubt to be a hybrid of *Tr. durum* and *Tr. monococcum*. This was also confirmed by the likeness of the plant to the hybrids of *Tr. durum* and *Tr. monococcum* previously obtained by us.

The other plant (582-2), which eared somewhat later than the former, differed strongly as to its characters both from the hybrid plant 582-1 and from the maternal form, *Tr. durum melanopus*. But the absence of the waxy bloom and the general structure of the spike, which is compressed and which singlerow side is narrower that the double-row one, makes it rather reminescent of *Tr. monococcum*. It differed from the latter by a shorter length of the spike, a smaller number of spikelets and a heavy pubescence of the spike, which is absent in *Tr. monococcum flavescens*, but is characteristic of *Tr. durum melanopus*.

Of great interest however, was the pubescence of the nodes of the culm, characteristic both of *Tr. monococcum* in its pure form and of its hybrids with *Tr. durum*. Similarly to plant 582-1, this plant was also absolutely sterile, the difference being that in this case the anthers were not even fully developed. Therefore, it proved impossible to use this form for hybridization as a paternal parent, while its pollination with the pollen of either durum wheat or *Tr. monococcum* gave no seeds.

The counting of the chromosomes contained in the somatic cells of the meristem of the rootlets showed plant 582-1 to have $2n=21$, while plant 582-2 had 14.

Thus, it was definitely established that plant 582-1 is a F_1 hybrid of *Tr. durum melanopus* × *Tr. monococcum*, while plant 582-2 is a haploid form of *Tr. durum*.

Description of *Tr. durum*, *Tr. monococcum* and of 582-1 and 582-2

	Height of plant	Length of spike	Number of spikelets	Compactness of spikes	Width of spike	
					single-row side	double-row side
Tr. durum 069	55—73	57—66	11—14	17.8—20.7	110—122	85—92
	69.1 ± 0.8	62.2 ± 0.62	12.0 ± 0.11	19.35 ± 0.22	116.0 ± 1.00	89.1 ± 1.14
582-1	101	65	15	23.07	72	106
582-2	68	34	11	32.35	41	82
Tr. monococcum flavescens .	84—107	45—56	16—19	30.4—37.3	46—66	84—106
	97.9 ± 1.36	51.9 ± 0.59	18.1 ± 0.17	33.8 ± 0.21	56.9 ± 0.99	96.7 ± 1.26

Then, we have a new instance of a haploid form of wheat due to remote hybridization. Haploid forms of wheat had been obtained by Kihara and Katayama (1933), by Katayama (1934) and by Chizaki (1933) from *Tr. monococcum*, both spontaneously and by pollination with X-rayed pollen. Haploid plants of soft wheat had been obtained by Gaines and Aase (1926) in the offspring of hybrids of *Tr. compactum* × *Aegilops cylindrica*, and by Yamasaki (1934) in the pure line of *Tr. vulgare*. In the group of hard wheats Efeikin and Vasiljev (1935) obtained two haploid plants: *Tr. persicum* v. *fuliginosum* and *Tr. dicoccum* v. *rufum*, by pollination with X-rayed pollen.

The appearance of the haploid plant of *Tr. durum* (582-1) may be accounted for the hypothesis of the parthenogenetic development of the egg-cell of *Tr. durum*, induced by the pollen of a remote form of *Tr. monococcum*.

Many years of work on the hybridization of wheat with *Tr. monococcum* have enabled us to establish which forms are most suitable for hybridization whith *Tr. monococcum* and which are least suitable for this purpose. *Tr. durum melanopus* belongs to the latter category. The comparative difficulty of hybridization (below 2%) lends probability to our hypothesis as to the origin of the haploid plant 582-2.

Of great interest is the likeness of the haploid obtained to the haploids of Persian wheat and of *Tr. dicoccum* previously described, as it suggests a certain parallelism in the variability of some forms of wheat with the reduction of the number of chromosomes down to the haploid number. Also very interesting is the fact that haploid hard wheats having 14 chromosomes acquire characteristics peculiar to diploid 14-chromosome *Tr. monococcum* (pubescence of culm nodes).

The appearance of this characteristic is obviously due to a general change in the physiological condition of the organism, the usual number of its chromosomes being reduced by half.

Laboratory of Plant Genetics,
Leningrad State University.

Received
27. XII. 1935.